Pollution and investment choice in transport infrastructures: an overlapping generations approach

Renaud Luc*

April 15, 2019

Abstract

This paper studies the consequences of modal shift on growth and well-being. An overlapping generations model is develop with two forms of public capital, two transport infrastructures whose services serve as input to the firm. These services correspond to flows of goods responsible for more or less significant pollutant emissions depending on the mode of transport used, road or rail. The modal choice is orientate by the instruments of economic policy. Four equilibrium regimes are identify where each one is characterize by the congestion or not of the one and the other of the infrastructures. In a steady state, the saturation of infrastructure leads to higher per capita income values, with a corresponding deterioration in the quality of the environment. Pollutant release due to transport is a negative externality for households. On the golden age, the optimal allocation of public expenditures is more favorable to the alternative mode of transport to the road than when maximizing the net production.

*Univ. Polytechnique Hauts-de-France, EA 1384 - IDP - Institut du Développement et de la Prospective, F-59313

Le modèle à générations imbriquées

L'Etat

Le rôle de l'Etat est de fournir des infrastructures de transport dont les services servent d'input à la firme représentative. La mobilité des marchandises est réalisée sur deux types d'infrastructures. On distingue ici les infrastructures routières G_{pt} des infrastructures ferroviaires G_{ct}. Ces infrastructures sont considérées comme des stocks dans l'économie et sont exprimées en kilomètres. Un stock d'infrastructure en $t+1$ correspond à la partie non dépréciée du stock en t auquel s'ajoute la dépense d'investissement, proportionnelle au produit. Leur évolution est décrite par l'équation d'accumulation suivante:

$$G_{it+1} = (1-\gamma)G_{it} + \eta_i Y_t \tag{1}$$

Les services de transport correspondent à des flux de marchandises exprimés en t-km. H_{pt} et H_{ct} désignent respectivement les flux de marchandises transportés par la route et par la voie ferrée. Compte tenu de cette représentation, une demande de services (t-km) peut congestionner l'infrastructure (km). La capacité d'accueil maximale d'une infrastructure est donnée par la contrainte suivante:

$$\bar{H}_{it} = \varepsilon G_{it} \tag{2}$$

Pour chaque t-km transportée la firme doit s'acquitter des prix z_c et z_p selon l'infrastructure utilisée. Ces prix se composent d'un droit d'usage, respectivement q_c et q_p, auquel s'ajoute pour chacun d'eux la dépréciation γ de l'infrastructure. Les recettes collectées sont affectées aux dépenses d'investissement. L'Etat doit garantir l'équilibre de la caisse des transferts représentée par les contraintes budgétaires suivantes:

$$z_i H_{it} + N_t \theta_{it} = \eta_i Y_t + \bar{E}_i \tag{3}$$

Afin de garantir cet équilibre, il est possible de ponctionner ou transférer les montants θ_{ct} et θ_{pt} sur le revenu des ménages.

Comportement des consommateurs

A chaque période naît une génération d'individus. Ces individus vont vivre deux périodes. Une première période où les agents sont jeunes et travaillent puis une seconde où ils sont vieux et à la retraite. De cette manière, à chaque date t, deux cohortes d'individus différents coexistent: N_t agents jeunes et N_{t-1} agents vieux. Par hypothèse, la population est constante.

L'offre de travail est parfaitement inélastique. En contrepartie, l'agent reçoit un salaire w_t. Il vient s'ajouter à ce revenu les transferts θ_{ct} et θ_{pt} émanant des autorités publiques, chargées de fournir les infrastructures de transport. Cet agent alloue son revenu entre sa consommation c_t et son épargne s_t. La contrainte budgétaire de jeunesse s'écrit:

$$w_t - \theta_{ct} - \theta_{pt} = c_t + s_t \tag{4}$$

Pour chaque unité d'épargne s_t investie, l'agent anticipe le rendement $R^e_{t+1} = 1 + r^e_{t+1}$. On suppose que les anticipations de l'agent sont parfaites telles que le rendement espéré soit équivalent au rendement réalisé. Vieux et à la retraite, les agents consomment l'intégralité de leur richesse. La contrainte budgétaire de vieillesse s'écrit:

$$d_{t+1} = R_{t+1} s_t \tag{5}$$

Les préférences de l'agent né en t sont représentées par sa fonction d'utilité inter-temporelle. L'utilité dépend non seulement de sa consommation de cycle de vie mais également des conditions dans lesquelles l'agent peut consommer. Ce dernier est sensible à la qualité de son environnement et retire une désutilité de la pollution. La fonction d'utilité inter-temporelle s'écrit:

$$U(c_t, d_{t+1}, Q_t, Q_{t+1}) = \ln(c_t) + \xi \ln(Q_t) + \beta \left(\ln(d_{t+1}) + \chi \ln(Q_{t+1})\right)$$

où les paramètres ξ et χ expriment la sensibilité de l'agent à la qualité environnementale, elle-même définie de la manière suivante:

$$Q_t = \bar{Q} - M_t \tag{6}$$

$\bar{Q}$ désigne le niveau maximal que peut atteindre la qualité environnementale et M_t les émissions totales de polluants locaux (gaz et particules fines). La formation de ces émissions est générée par le processus de production. Il s'agit ici d'un flux et non d'un stock de polluant.

L'objectif de l'agent né en t, sensible à la qualité de l'environnement, est de maximiser son utilité intertemporelle sous ses contraintes de budget. La pollution est perçue comme une externalité négative pour les agents qui la considèrent comme une donnée. On aboutit aux conditions d'optimalité suivantes:

$$s_t = \frac{\beta}{1+\beta}(w_t - \theta_{ct} - \theta_{pt}) \tag{7}$$

$$c_t = \frac{1}{1+\beta}(w_t - \theta_{ct} - \theta_{pt}) \tag{8}$$

$$d_{t+1} = R_{t+1}\frac{\beta}{1+\beta}(w_t - \theta_{ct} - \theta_{pt}) \tag{9}$$

Le comportement de la firme représentative

A travers la firme représentative on représente une multitude d'autres firmes aux comportements concurrentiels possédant la même technologie de production à rendements d'échelle constants. La firme représentative produit un bien homogène en utilisant une combinaison de facteurs: le capital, le travail et les services de transport. La technologie de production est représentée par une fonction de type Cobb-Douglas:

$$Y_t = F(K_t, L_t, H_{ct}, H_{pt}) = AK_t^{\alpha_k} L_t^{\alpha_l} H_{ct}^{\alpha_c} H_{pt}^{\alpha_p} \tag{10}$$

L'usage des services de transport est source d'externalités à travers le rejet d'émissions polluantes:

$$M_t = \mu_c H_{ct} + \mu_p H_{pt} \tag{11}$$

Le programme d'optimisation de la firme correspond à la maximisation du profit sous les contraintes de capacité des infrastructures de transport:

$$\begin{cases} \underset{\{K_t, L_t, H_{ct}, H_{pt}\}}{\text{Max}} & \Pi(K_t, L_t, H_{ct}, H_{pt}) \\ \text{s.c.} & H_{ct} \leq \bar{H}_{ct} \\ & H_{pt} \leq \bar{H}_{pt} \end{cases}$$

Dans un cadre concurrentiel, la résolution de ce problème d'optimisation à l'aide du Lagrangien associé aboutit à rémunérer chaque facteur à sa productivité marginale. La fonction de production a la propriété d'être homogène du premier degré, on retient la forme intensive pour la suite de l'analyse.

$$\alpha_k A k_t^{\alpha_k - 1} h_{ct}^{\alpha_c} h_{pt}^{\alpha_p} = R_t \tag{12}$$

$$\alpha_l A k_t^{\alpha_k} h_{ct}^{\alpha_c} h_{pt}^{\alpha_p} = w_t \tag{13}$$

$$\alpha_c A k_t^{\alpha_k} h_{ct}^{\alpha_c - 1} h_{pt}^{\alpha_p} = z_c + \lambda_{ct} \tag{14}$$

$$\alpha_p A k_t^{\alpha_k} h_{ct}^{\alpha_c} h_{pt}^{\alpha_p - 1} = z_p + \lambda_{pt} \tag{15}$$

Néanmoins, compte tenu des contraintes d'inégalité, la solution est à discuter selon la saturation ou non des contraintes

Proposition 1 *Les quantités demandées par la firme* (k_t, h_{ct}, h_{pt})*, solution de la maximisation du profit, appartiennent à l'un des quatre régimes identifiés. Le tableau suivant résume les conditions d'appartenance de la solution:*

	$\varepsilon g_{ct} > \frac{\alpha_c}{\alpha_l}\frac{w_t}{z_c}$	$\varepsilon g_{ct} < \frac{\alpha_c}{\alpha_l}\frac{w_t}{z_c}$
$\varepsilon g_{pt} > \frac{\alpha_p}{\alpha_l}\frac{w_t}{z_p}$	Régime A $(\tilde{k}_t, \tilde{h}_{ct}, \tilde{h}_{pt})$	Régime B $(\hat{k}_t, \hat{h}_{ct}, \hat{h}_{pt})$
$\varepsilon g_{pt} < \frac{\alpha_p}{\alpha_l}\frac{w_t}{z_p}$	Régime C $(\check{k}_t, \check{h}_{ct}, \check{h}_{pt})$	Régime D $(\mathring{k}_t, \mathring{h}_{ct}, \mathring{h}_{pt})$

Figure 1: Conditions d'appartenance de l'optimum

Preuve. *Voir l'annexe 1.*

Lorsque la quantité de services de transport demandée par la firme pour une infrastructure est trop importante, la capacité d'accueil maximale de l'infrastructure est atteinte $h_{it} = \bar{h}_{it} = \varepsilon g_{it}$ et la contrainte associée se sature $\lambda_{it} > 0$. Pour des prix et des paramètres donnés, les conditions d'appartenance portent sur les capacités d'accueil qui apparaissent insuffisantes pour soutenir les flux de transport dans les régimes où la congestion apparaît (Régimes B, C et D).

L'équilibre temporaire de la période t

Définition 1 *L'équilibre temporaire de la période t, conditionné à la politique* $(\eta_c, \eta_p, z_c, z_p)$*, est défini par les prix* (w_t, R_t)*, les transferts* $(\theta_{ct}, \theta_{pt})$*, les variables par tête* $(s_t, c_t, d_t, k_t, h_{ct}, h_{pt}, y_t)$ *et les variables agrégées* (K_t, L_t, H_{ct}, H_{pt}, Y_t, M_{ct}, M_{pt}) *tel que les agents sont à leur optimum, les marchés sont équilibrés et la caisse des transferts est équilibrée.*

Afin de définir l'équilibre temporaire de manière générale on caractérise dans un premier temps le revenu par tête y_t. On obtient de cette manière une expression du revenu par tête pour chaque régime:

$$\text{Régime A: } \tilde{y}_t = \left[Ak_t^{\alpha_k}\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_l}} \equiv \tilde{y}(k_t, z_c, z_p)$$

$$\text{Régime B: } \hat{y}_t = \left[Ak_t^{\alpha_k}(\varepsilon g_{ct})^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_p}} \equiv \hat{y}(k_t, g_{ct}, z_p)$$

$$\text{Régime C: } \check{y}_t = \left[Ak_t^{\alpha_k}\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}(\varepsilon g_{pt})^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_c}} \equiv \check{y}(k_t, g_{pt}, z_c)$$

Régime D: $\mathring{y}_t = Ak_t^{\alpha_k}(\varepsilon g_{ct})^{\alpha_c}(\varepsilon g_{pt})^{\alpha_p} \equiv \mathring{y}(k_t, g_{ct}, g_{pt})$

Si aucune infrastructure n'est saturée, y_t s'exprime en fonction de k_t et les quantités de services de transport échangées sont $h_{it} = \frac{\alpha_i}{z_i} y_t$. En revanche, si l'une des infrastructures est saturée, les quantités échangées sont telles que $h_{it} = \varepsilon g_{it}$ et y_t devient fonction de k_t et du stock d'infrastructure considéré g_{it}.

Proposition 2 *Etant donnés* $\{N_{t-1}, s_{t-1}, G_{pt-1}, G_{ct-1}\}$ *l'équilibre temporaire existe. Il est unique mais appartient à l'un des quatre régimes compte tenu de la saturation ou non des infrastructures. L'équilibre peut-être exprimé en fonction de* y_t*:*

$$\left\{\begin{array}{lcl} w_t & = & \alpha_l y_t \\ R_t & = & \alpha_k \frac{1}{k_t} y_t \\ s_t & = & \frac{\beta}{1+\beta}\big[\,[\alpha_l - (\eta_c - \alpha_c) - (\eta_p - \alpha_p)]\, y_t\big] \\ c_t & = & \frac{1}{1+\beta}\big[\,[\alpha_l - (\eta_c - \alpha_c) - (\eta_p - \alpha_p)]\, y_t\big] \\ d_t & = & \alpha_k y_t \\ \theta_{ct} & = & (\eta_c - \alpha_c) y_t \\ \theta_{pt} & = & (\eta_p - \alpha_p) y_t \end{array}\right.$$

Les émissions polluantes, fonction de h_{it} *s'écrivent* $M_{it} = \mu_i \frac{\alpha_i}{z_i} y_t$ *si l'infrastructure considérée n'est pas saturée. Dans le cas contraire, elles sont définies par la capacité maximale de l'infrastructure* $M_{it} = N\varepsilon g_{it}$

Preuve. *Voir l'annexe 2.*

Equilibre inter-temporel, état stationnaire et transition

A l'équilibre, le lien entre deux périodes t et $t+1$ est donné par les équations d'accumulation de trois stocks de capitaux présents dans l'économie k_t, g_{ct} et g_{pt}. La formation du capital privé est donnée par la fonction d'épargne:

$$k_{t+1} = s_t = \frac{\beta}{1+\beta}\big[\,[\alpha_l - (\eta_c - \alpha_c) - (\eta_p - \alpha_p)]\, y_t\big] \tag{16}$$

La suite $\{k_{t+1}\}_{t=0}^{+\infty}$ est définie à condition que $\alpha_l - (\eta_c - \alpha_c) - (\eta_p - \alpha_p) > 0$. Autrement dit, les transferts θ_{ct} et θ_{pt}, dans le cadre d'un déficit de la caisse des transferts, ne soient pas supérieurs à la rémunération du travail. On suppose que le capital se déprécie entièrement au cours d'une période.

La formation des stocks d'infrastructures est donnée quant à elle par:

$$g_{ct+1} = (1-\gamma) g_{ct} + \eta_c y_t \tag{17}$$
$$g_{pt+1} = (1-\gamma) g_{pt} + \eta_p y_t \tag{18}$$

Définition 2 *Étant donnés les stocks k_0, g_{c0} et g_{p0}, un équilibre inter-temporel avec prévisions parfaites, conditionné à la politique (η_c, η_p, z_c, z_p), est une suite d'équilibres temporaires, $\{ w_t, R_t, c_t, s_t, d_t, \theta_{ct}, \theta_{pt}, h_{ct}, h_{pt}, M_{ct}, M_{pt}, y_t \}_{t=0}^{+\infty}$, qui satisfont à chaque période $t \geq 0$ les conditions* (16),(17) *et* (18).

Formellement, le système dynamique décrit par (16), (17) et (18) est ajusté en substituant y_t par ses différentes expressions $(\tilde{y}_t, \hat{y}_t, \check{y}_t, \mathring{y}_t)$. Ainsi, quel que soit le régime caractérisant l'économie, l'équilibre inter-temporel est défini.

L'équilibre stationnaire

Définition 3 *Un équilibre stationnaire X^* du système décrit par* (16), (17) *et* (18) *est un élément (k^*, g_c^*, g_p^*) tel que $X_{t+1} = X_t$ $\forall t$. Cet équilibre est solution du système*

$$X_{t+1} - X_t = 0 \iff \left\{ \begin{array}{lcl} k_{t+1} - k_t & = & 0 \\ g_{ct+1} - g_{ct} & = & 0 \\ g_{pt+1} - g_{pt} & = & 0 \end{array} \right. \textit{noté} \left\{ \begin{array}{lcl} \Delta_k & = & 0 \\ \Delta_{g_c} & = & 0 \\ \Delta_{g_p} & = & 0 \end{array} \right.$$

La résolution d'un tel système passe dans un premier temps par la formation des fonctions Δ de chacun des stocks dans chaque régime quand ces fonctions ne dépendent que de deux variables de stock au plus. Elles forment les lignes de phases que l'on peut représenter graphiquement. Ainsi, les points d'intersection, s'ils existent, sont les situations d'équilibre. La résolution analytique du système décrit par (16), (17) et (18), pour les différents régimes, est présentée en Annexe 3. Une solution explicite (k^*, g_c^*, g_p^*) est donnée ci-dessous pour les régimes A, B, C et D.

Afin de définir l'équilibre stationnaire de manière générale pour les régimes A, B et C on caractérise dans un premier temps le revenu par tête y^* d'équilibre. On obtient de cette manière la valeur stationnaire y^* pour ces régimes:

$$\tilde{y}^* = \left[\left[\frac{\beta}{1+\beta} (\alpha_l - (\eta_c - \alpha_c) - (\eta_p - \alpha_p)) \right]^{\alpha_k} A \left(\frac{\alpha_c}{z_c} \right)^{\alpha_c} \left(\frac{\alpha_p}{z_p} \right)^{\alpha_p} \right]^{\frac{1}{\alpha_l}}$$

$$\hat{y}^* = \left[\left(\frac{\eta_c}{\gamma} \right)^{\alpha_c} \left[\frac{\beta}{1+\beta} (\alpha_l - (\eta_c - \alpha_c) - (\eta_p - \alpha_p)) \right]^{\alpha_k} A \varepsilon^{\alpha_c} \left(\frac{\alpha_p}{z_p} \right)^{\alpha_p} \right]^{\frac{1}{\alpha_l}}$$

$$\check{y}^* = \left[\left(\frac{\eta_p}{\gamma} \right)^{\alpha_p} \left[\frac{\beta}{1+\beta} (\alpha_l - (\eta_c - \alpha_c) - (\eta_p - \alpha_p)) \right]^{\alpha_k} A \varepsilon^{\alpha_p} \left(\frac{\alpha_c}{z_c} \right)^{\alpha_c} \right]^{\frac{1}{\alpha_l}}$$

De cette manière, l'équilibre stationnaire est défini par:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} k^* & = & \left[\frac{\beta}{1+\beta} (\alpha_l - (\eta_c - \alpha_c) - (\eta_p - \alpha_p)) \right] y^* \\ g_c^* & = & \frac{\eta_c}{\gamma} y^* \\ g_p^* & = & \frac{\eta_p}{\gamma} y^* \end{array} \right. \tag{19}$$

L'état stationnaire avec pour régime d'équilibre D est défini de la manière suivante:

$$\left\{\begin{array}{lll} \mathring{k}^* & = & \left[\eta_c^{\alpha_c}\eta_p^{\alpha_p}\left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)A\varepsilon^{\alpha_c+\alpha_p}\right]^{(\alpha_k+\alpha_l)(1-\alpha_k)}\right. \\ & & \left.\left(\frac{1}{\gamma}A\varepsilon^{\alpha_c+\alpha_p}\right)^{\alpha_c+\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_l}} \\ \mathring{g}_c^* & = & \left[\eta_c^{1-\alpha_p}\eta_p^{\alpha_p}\frac{1}{\gamma}A\varepsilon^{\alpha_c+\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_l}}(\mathring{k}^*)^{\frac{\alpha_k}{\alpha_k+\alpha_l}} \\ \mathring{g}_p^* & = & \left[\eta_c^{\alpha_c}\eta_p^{1-\alpha_c}\frac{1}{\gamma}A\varepsilon^{\alpha_c+\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_l}}(\mathring{k}^*)^{\frac{\alpha_k}{\alpha_k+\alpha_l}} \end{array}\right. \tag{20}$$

L'étude du système dynamique (Cf. Annexe 3) aboutit à une solution explicite pour chacun des quatre régimes. Néanmoins, l'appartenance de l'état stationnaire à l'un de ces régimes est conditionnée par le niveau des stocks d'infrastructures g_{ct} et g_{pt}. On précise dans la section suivante les conditions d'appartenance, ou d'exclusion, de l'état stationnaire au régime d'équilibre le caractérisant.

Régime d'équilibre de l'état stationnaire

Depuis l'optimum de la firme, le régime d'équilibre de l'économie est déterminé par la taille des infrastructures g_{ct}, g_{pt}. On a défini les conditions d'appartenance de l'économie à son régime d'équilibre de la façon suivante:

$$g_{ct} > \underbrace{\frac{\alpha_c w_t}{\varepsilon\alpha_l z_c}}_{g_{cst}} \text{ et } g_{pt} > \underbrace{\frac{\alpha_p w_t}{\varepsilon\alpha_l z_p}}_{g_{pst}}$$

De cette manière, si ces capacités sont inférieures aux valeurs g_{cst} et g_{pst}, définies comme des seuils, alors chacune des infrastructures est saturée. Évaluées à l'état stationnaire ces conditions deviennent

$$\begin{aligned} g_c^* > g_{cs}^* &\iff z_c > \frac{\alpha_c}{\eta_c}\frac{\gamma}{\varepsilon} \\ g_p^* > g_{ps}^* &\iff z_p > \frac{\alpha_p}{\eta_p}\frac{\gamma}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Proposition 3 *Le système dynamique décrit par* (16), (17) *et* (18) *admet un unique état stationnaire dont le régime d'équilibre est conditionné par les instruments de politique* $(z_c, z_p, \eta_c, \eta_p)$ *et les paramètres* $(\alpha_c, \alpha_p, \gamma, \varepsilon)$. *Le tableau ci-dessous résume l'ensemble des configurations.*

Preuve. *Voir l'annexe 4.*

Les conditions d'appartenance exprimées de cette façon, il ressort de cette proposition le rôle déterminant de la tarification du trafic. En effet, lorsque celle-ci n'est pas assez importante la firme intensifie l'usage des services

	$z_c > \frac{\alpha_c}{\eta_c}\frac{\gamma}{\epsilon}$	$z_c < \frac{\alpha_c}{\eta_c}\frac{\gamma}{\epsilon}$
$z_p > \frac{\alpha_p}{\eta_p}\frac{\gamma}{\epsilon}$	Régime A $(\tilde{k}^*, \tilde{g}_c^*, \tilde{g}_p^*)$	Régime B $(\hat{k}^*, \hat{g}_c^*, \hat{g}_p^*)$
$z_p < \frac{\alpha_p}{\eta_p}\frac{\gamma}{\epsilon}$	Régime C $(\check{k}^*, \check{g}_c^*, \check{g}_p^*)$	Régime D $(\mathring{k}^*, \mathring{g}_c^*, \mathring{g}_p^*)$

Figure 2: Régime d'équilibre de l'état stationnaire

de transport de l'infrastructure considérée jusqu'à atteindre sa capacité d'accueil maximale et provoque ainsi la saturation.

Comte tenu de la configuration $(z_c, z_p, \eta_c, \eta_p, \alpha_c, \alpha_p, \gamma, \varepsilon)$ le régime d'équilibre de l'état stationnaire est connu. Cependant, si les conditions initiales (k_0, g_{c0}, g_{p0}) appartiennent à un autre régime que celui d'équilibre, on assiste à des changements de régime sur la transition.

Transition et changement de régime

Sur la transition, quelle que soit la période t, la solution $(k_{t+1}, g_{ct+1}, g_{pt+1})$ appartient à l'un des quatre régimes. L'appartenance de l'économie à l'un des régimes est définie par le niveau des stocks d'infrastructure g_{ct} et g_{pt}. Si ces stocks sont inférieurs aux valeurs g_{cst} et g_{pst}, définies comme des seuils, alors chacune des infrastructures devient saturée.

Dans le cadre du régime C, l'infrastructure g_{pt} est saturée tandis que g_{ct} ne l'est pas. Cela se traduit par les conditions:

$$g_{ct} > g_{cst} \text{ et } g_{pt} < g_{pst}$$

Évaluées à l'état stationnaire ces conditions deviennent:

$$\hat{g}_c^* > g_{cs}^* \iff z_c > \frac{\alpha_c}{\eta_c}\frac{\gamma}{\epsilon}$$
$$\hat{g}_p^* < g_{ps}^* \iff z_p < \frac{\alpha_p}{\eta_p}\frac{\gamma}{\epsilon}$$

Le régime d'équilibre de l'état stationnaire est de type C à condition que les prix z_c et z_p respectent les conditions ci-dessus. Si ces conditions ne sont pas respectées, le régime d'équilibre ne peut être de type C. Ce constat peut être retrouvé graphiquement.

La figure 3 représente l'analyse dynamique combinée de la suite k_t et g_{pt} dans le régime A et C. Deux cas de figure y sont représentés. Dans le cadran gauche le prix z_p est supérieur à celui du cadran droit. Pour reprendre l'exemple développé, on suppose une combinaison $(\check{k}_0, \check{g}_{p0})$ inférieure au seuil g_{ps0} dans le cadran de gauche. De cette manière, la condition initiale appartient au régime C. Dans cette zone les valeurs g_{pt} sont croissantes (dynamique symbolisée par les flèches vertes) et vont passer au-dessus du seuil g_{pst}. L'économie bascule dans le régime A (dynamique symbolisée par les flèches bleues) puis converge vers $(\tilde{k}^*, \tilde{g}_p^*)$.

De façon similaire, une combinaison $(\tilde{k}_0, \tilde{g}_{c0})$ supérieure à g_{ps0} dans le cadran droit correspond à une condition initiale appartenant au régime A. Dans cette zone les valeurs g_{pt} sont décroissantes (dynamique symbolisée par les flèches bleues) et vont passer en-dessous du seuil g_{pst}. L'économie bascule dans le régime C (dynamique symbolisée par les flèches vertes) puis converge vers $(\check{k}^*, \check{g}_p^*)$.

Ainsi, quelles que soient les conditions initiales, le régime d'équilibre de l'état stationnaire est défini par la configuration $(z_c, z_p, \eta_c, \eta_p, \alpha_c, \gamma, \varepsilon)$. Les tableaux ci-dessous résument les transitions possibles depuis des conditions initiales appartenant aux régimes A, B et C.

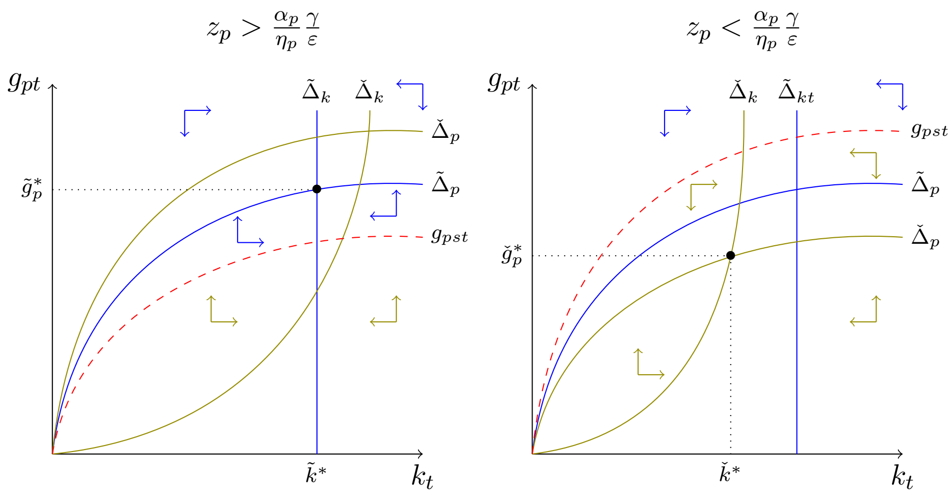

Figure 3: Dynamique k_t et g_{pt} dans le régime A et C

Condition initiale \ Régime d'équilibre		$A : z_c > \frac{\alpha_c}{\eta_c}\frac{\gamma}{\varepsilon} et z_p > \frac{\alpha_p}{\eta_p}\frac{\gamma}{\varepsilon}$	$B : z_c < \frac{\alpha_c}{\eta_c}\frac{\gamma}{\varepsilon} et z_p > \frac{\alpha_p}{\eta_p}\frac{\gamma}{\varepsilon}$	$C : z_c > \frac{\alpha_c}{\eta_c}\frac{\gamma}{\varepsilon} et z_p < \frac{\alpha_p}{\eta_p}\frac{\gamma}{\varepsilon}$	$D : z_c < \frac{\alpha_c}{\eta_c}\frac{\gamma}{\varepsilon} et z_p < \frac{\alpha_p}{\eta_p}\frac{\gamma}{\varepsilon}$
Régime A $g_{c0} > g_{cs0}$ $g_{p0} > g_{ps0}$	$g_{c0} > \tilde{\Delta}_{c0}$ $g_{p0} > \tilde{\Delta}_{p0}$	$g_{ct} \downarrow$ $g_{pt} \downarrow$ $k_t \uparrow$ ou $\downarrow$	$g_{ct} \downarrow$ $g_{pt} \uparrow$ ou $\downarrow$ $k_t \uparrow$ ou $\downarrow$	$g_{ct} \downarrow$ $g_{pt} \uparrow$ ou $\downarrow$ $k_t \uparrow$ ou $\downarrow$	$g_{ct} \downarrow$ $g_{pt} \downarrow$ $k_t \uparrow$ ou $\downarrow$
	$g_{c0} < \tilde{\Delta}_{c0}$ $g_{p0} > \tilde{\Delta}_{p0}$	$g_{ct} \uparrow$ $g_{pt} \downarrow$ $k_t \uparrow$ ou $\downarrow$	Condition initiale de type B	$g_{ct} \uparrow$ ou $\downarrow$ $g_{pt} \downarrow$ $k_t \uparrow$ ou $\downarrow$	Condition initiale de type B
	$g_{c0} > \tilde{\Delta}_{c0}$ $g_{p0} < \tilde{\Delta}_{p0}$	$g_{ct} \downarrow$ $g_{pt} \uparrow$ $k_t \uparrow$ ou $\downarrow$	$g_{ct} \downarrow$ $g_{pt} \uparrow$ ou $\downarrow$ $k_t \uparrow$ ou $\downarrow$	Condition initiale de type C	Condition initiale de type C
	$g_{c0} < \tilde{\Delta}_{c0}$ $g_{p0} < \tilde{\Delta}_{p0}$	$g_{ct} \uparrow$ $g_{pt} \uparrow$ $k_t \uparrow$ ou $\downarrow$	Condition initiale de type B	Condition initiale de type C	Condition initiale de type D

Table 1: Transition depuis le régime A

Condition initiale \ Régime d'équilibre		$A : z_c > \frac{\alpha_c}{\eta_c}\frac{\gamma}{\varepsilon} et z_p > \frac{\alpha_p}{\eta_p}\frac{\gamma}{\varepsilon}$	$B : z_c < \frac{\alpha_c}{\eta_c}\frac{\gamma}{\varepsilon} et z_p > \frac{\alpha_p}{\eta_p}\frac{\gamma}{\varepsilon}$	$C : z_c > \frac{\alpha_c}{\eta_c}\frac{\gamma}{\varepsilon} et z_p < \frac{\alpha_p}{\eta_p}\frac{\gamma}{\varepsilon}$	$D : z_c < \frac{\alpha_c}{\eta_c}\frac{\gamma}{\varepsilon} et z_p < \frac{\alpha_p}{\eta_p}\frac{\gamma}{\varepsilon}$
Régime B $g_{c0} < g_{cs0}$ $g_{p0} > g_{ps0}$	$g_{c0} > \hat{\Delta}_{c0}$ $g_{p0} > \hat{\Delta}_{p0}$	Condition initiale de type A	$g_{ct} \downarrow$ $g_{pt} \uparrow$ ou $\downarrow$ $k_t \uparrow$ ou $\downarrow$	Condition initiale de type A	$g_{ct} \downarrow$ $g_{pt} \uparrow$ ou $\downarrow$ $k_t \uparrow$ ou $\downarrow$
	$g_{c0} < \hat{\Delta}_{c0}$ $g_{p0} > \hat{\Delta}_{p0}$	$g_{ct} \uparrow$ $g_{pt} \uparrow$ ou $\downarrow$ $k_t \uparrow$ ou $\downarrow$	$g_{ct} \uparrow$ $g_{pt} \uparrow$ ou $\downarrow$ $k_t \uparrow$ ou $\downarrow$	$g_{ct} \uparrow$ ou $\downarrow$ $g_{pt} \uparrow$ ou $\downarrow$ $k_t \uparrow$ ou $\downarrow$	$g_{ct} \uparrow$ ou $\downarrow$ $g_{pt} \uparrow$ ou $\downarrow$ $k_t \uparrow$ ou $\downarrow$
	$g_{c0} > \hat{\Delta}_{c0}$ $g_{p0} < \hat{\Delta}_{p0}$	Condition initiale de type A	$g_{ct} \downarrow$ $g_{pt} \uparrow$ ou $\downarrow$ $k_t \uparrow$ ou $\downarrow$	Condition initiale de type A	$g_{ct} \downarrow$ $g_{pt} \uparrow$ ou $\downarrow$ $k_t \uparrow$ ou $\downarrow$
	$g_{c0} < \hat{\Delta}_{c0}$ $g_{p0} < \hat{\Delta}_{p0}$	$g_{ct} \uparrow$ $g_{pt} \uparrow$ ou $\downarrow$ $k_t \uparrow$ ou $\downarrow$	$g_{ct} \uparrow$ $g_{pt} \uparrow$ ou $\downarrow$ $k_t \uparrow$ ou $\downarrow$	$g_{ct} \uparrow$ $g_{pt} \uparrow$ ou $\downarrow$ $k_t \uparrow$ ou $\downarrow$	$g_{ct} \uparrow$ $g_{pt} \uparrow$ ou $\downarrow$ $k_t \uparrow$ ou $\downarrow$

Table 2: Transition depuis le régime B

Condition initiale \ Régime d'équilibre		$A : z_c > \frac{\alpha_c}{\eta_c}\frac{\gamma}{\varepsilon} et z_p > \frac{\alpha_p}{\eta_p}\frac{\gamma}{\varepsilon}$	$B : z_c < \frac{\alpha_c}{\eta_c}\frac{\gamma}{\varepsilon} et z_p > \frac{\alpha_p}{\eta_p}\frac{\gamma}{\varepsilon}$	$C : z_c > \frac{\alpha_c}{\eta_c}\frac{\gamma}{\varepsilon} et z_p < \frac{\alpha_p}{\eta_p}\frac{\gamma}{\varepsilon}$	$D : z_c < \frac{\alpha_c}{\eta_c}\frac{\gamma}{\varepsilon} et z_p < \frac{\alpha_p}{\eta_p}\frac{\gamma}{\varepsilon}$
Régime C $g_{c0} > g_{cs0}$ $g_{p0} < g_{ps0}$	$g_{c0} > \check{\Delta}_{c0}$ $g_{p0} > \check{\Delta}_{p0}$	Condition initiale de type A	Condition initiale de type A	$g_{ct} \uparrow$ ou $\downarrow$ $g_{pt} \downarrow$ $k_t \uparrow$ ou $\downarrow$	$g_{ct} \uparrow$ ou $\downarrow$ $g_{pt} \downarrow$ $k_t \uparrow$ ou $\downarrow$
	$g_{c0} < \check{\Delta}_{c0}$ $g_{p0} > \check{\Delta}_{p0}$	Condition initiale de type A	Condition initiale de type A	$g_{ct} \uparrow$ ou $\downarrow$ $g_{pt} \downarrow$ $k_t \uparrow$ ou $\downarrow$	$g_{ct} \uparrow$ ou $\downarrow$ $g_{pt} \downarrow$ $k_t \uparrow$ ou $\downarrow$
	$g_{c0} > \check{\Delta}_{c0}$ $g_{p0} < \check{\Delta}_{p0}$	$g_{ct} \uparrow$ ou $\downarrow$ $g_{pt} \uparrow$ $k_t \uparrow$ ou $\downarrow$	$g_{ct} \uparrow$ ou $\downarrow$ $g_{pt} \uparrow$ $k_t \uparrow$ ou $\downarrow$	$g_{ct} \uparrow$ ou $\downarrow$ $g_{pt} \uparrow$ $k_t \uparrow$ ou $\downarrow$	$g_{ct} \uparrow$ ou $\downarrow$ $g_{pt} \uparrow$ $k_t \uparrow$ ou $\downarrow$
	$g_{c0} < \check{\Delta}_{c0}$ $g_{p0} < \check{\Delta}_{p0}$	$g_{ct} \uparrow$ ou $\downarrow$ $g_{pt} \uparrow$ $k_t \uparrow$ ou $\downarrow$	$g_{ct} \uparrow$ ou $\downarrow$ $g_{pt} \uparrow$ $k_t \uparrow$ ou $\downarrow$	$g_{ct} \uparrow$ ou $\downarrow$ $g_{pt} \uparrow$ $k_t \uparrow$ ou $\downarrow$	$g_{ct} \uparrow$ ou $\downarrow$ $g_{pt} \uparrow$ $k_t \uparrow$ ou $\downarrow$

Table 3: Transition depuis le régime C

Analyse intergénérationnelle

Dans le cadre de l'exemple développé précédemment, on suppose que les conditions initiales correspondent à l'état stationnaire appartenant au régime d'équilibre C $(\check{k}^*, \check{g}_c^*, \check{g}_p^*)$. Les conditions suivantes sont respectées:

$$\check{g}_c^* > g_{cs}^* \iff z_c > \frac{\alpha_c}{\eta_c}\frac{\gamma}{\epsilon}$$
$$\check{g}_p^* < g_{ps}^* \iff z_p < \frac{\alpha_p}{\eta_p}\frac{\gamma}{\epsilon}$$

On suppose que les autorités publiques modifient en $t = 1$ la tarification de l'infrastructure qui supporte le transport routier, auquel cas $z_p' > \frac{\alpha_p}{\eta_p}\frac{\gamma}{\epsilon}$. Ce choc conduit la firme à réduire l'usage des services de transport routier. Plus généralement, l'économie converge vers l'état stationnaire appartenant au régime d'équilibre A $(\tilde{k}^*, \tilde{h}_c^*, \tilde{h}_p^*)$.

Cet effet a pour conséquence une diminution du revenu par tête stationnaire $\tilde{y}^* < \check{y}^*$ qui implique une baisse de la consommation de cycle de vie $\tilde{c}^* < \check{c}^*$ et $\tilde{d}^* < \check{d}^*$ mais une amélioration de la qualité de l'environnement $\tilde{Q}^* > \check{Q}^*$.

Cette partie doit être complétée.

Optimalité

Maximisation du produit net

Le produit net:

$$\Phi(k, h_c, h_p, g_c, g_p) = Ak^{\alpha_k} h_c^{\alpha_c} h_p^{\alpha_p} - k - \gamma g_c - \gamma g_p \tag{21}$$

La maximisation du produit net sous les contraintes de capacité des infrastructures $h_i \leq \varepsilon g_i$ conduit à saturer les infrastructures $h_i = \varepsilon g_i$. Les valeurs optimales sont solutions du système formé par les conditions suivantes:

$$\alpha_k A(k^*)^{\alpha_k - 1}(\varepsilon g_c^*)^{\alpha_c}(\varepsilon g_p^*)^{\alpha_p} = 1 \tag{22}$$
$$\alpha_c A(k^*)^{\alpha_k}(\varepsilon g_c^*)^{\alpha_c - 1}(\varepsilon g_p^*)^{\alpha_p} = \frac{\gamma}{\varepsilon} \tag{23}$$
$$\alpha_p A(k^*)^{\alpha_k}(\varepsilon g_c^*)^{\alpha_c}(\varepsilon g_p^*)^{\alpha_p - 1} = \frac{\gamma}{\varepsilon} \tag{24}$$

Pour la suite de l'analyse on définit les stocks g_i en fonction des dépenses d'investissements e_i. On donne $e_i = \eta_i y$. A l'état stationnaire, la dépréciation est compensée par l'investissement $\gamma g_i = e_i$ d'où $g_i = \frac{e_i}{\gamma}$. La capacité d'accueil maximale d'une infrastructure s'écrit $\varepsilon g_i = \varepsilon \frac{e_i}{\gamma}$.

Ainsi, on détermine le ratio des dépenses d'investissement de la maximisation du produit net:

$$\frac{e_c^{\Phi}}{e_p^{\Phi}} = \frac{\left[\alpha_k^{\alpha_k} A \alpha_c^{\alpha_l+\alpha_c} \alpha_p^{\alpha_p} \left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)^{\alpha_c+\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_l}}}{\left[\alpha_k^{\alpha_k} A \alpha_c^{\alpha_c} \alpha_p^{\alpha_l+\alpha_p} \left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)^{\alpha_c+\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_l}}} = \frac{\alpha_c}{\alpha_p} \tag{25}$$

L'âge d'or

L'utilité de cycle de vie d'un jeune en t:

$$U(c_t, d_{t+1}, Q_t, Q_{t+1}) = \ln(c_t) + \xi \ln(Q_t) + \beta \left(\ln(d_{t+1}) + \chi \ln(Q_{t+1})\right)$$

Les valeurs stationnaires optimales sont solutions de la maximisation de l'utilité inter-temporellle:

$$\begin{cases} \underset{\{c,d,h_c,h_p,k,e_c,e_p\}}{\text{Max}} & U(c,d,Q) \\ \text{s.c.} & Ak^{\alpha_k} h_c^{\alpha_c} h_p^{\alpha_p} = c + d + k + e_c + e_p \\ & h_c \leq \dfrac{\varepsilon e_c}{\gamma} \\ & h_p \leq \dfrac{\varepsilon e_c}{\gamma} \\ & Q = \bar{Q} - \mu_c N h_c - \mu_p N h_p \end{cases}$$

A l'aide du Lagrangien associé à ce problème, on obtient les conditions suivantes:

$$\frac{1}{c} = \lambda_1 \tag{26}$$

$$\frac{\beta}{d} = \lambda_1 \tag{27}$$

$$\lambda_1 \alpha_c A k^{\alpha_k} h_c^{\alpha_c - 1} h_p^{\alpha_p} = \lambda_c + \frac{\mu_c N}{Q} (\xi + \beta\chi) \tag{28}$$

$$\lambda_1 \alpha_p A k^{\alpha_k} h_c^{\alpha_c} h_p^{\alpha_p - 1} = \lambda_p + \frac{\mu_p N}{Q} (\xi + \beta\chi) \tag{29}$$

$$\lambda_1 \alpha_k A k^{\alpha_k - 1} h_c^{\alpha_c} h_p^{\alpha_p} = \lambda_1 \tag{30}$$

$$\lambda_c \frac{\varepsilon}{\gamma} = \lambda_1 \tag{31}$$

$$\lambda_p \frac{\varepsilon}{\gamma} = \lambda_1 \tag{32}$$

La recherche de l'utilité optimale conduit également à saturer les infrastructures puisque les multiplicateurs associés aux contraintes de capacité λ_c

et λ_p sont positifs et égaux à $\frac{\gamma}{\varepsilon}\lambda_1$ où λ_1 est le multiplicateur associé à la contrainte de ressource de l'économie. La désutilité que retire l'agent de la pollution modifie les valeurs optimales. Elles ne coïncident pas avec celles de la règle d'or.

Le ratio des dépenses d'investissement optimal est déterminé à l'aide de (28) et (29). En tenant compte de l'expression $\varepsilon g_i = \varepsilon \frac{e_i}{\gamma}$, des multiplicateurs λ_1, λ_c et λ_p on obtient

$$\frac{e_c^U}{e_p^U} = \frac{\alpha_c}{\alpha_p}\left[\frac{\frac{\gamma}{\varepsilon} + \mu_p N \frac{c}{Q}\left(\xi + \beta\chi\right)}{\frac{\gamma}{\varepsilon} + \mu_c N \frac{c}{Q}\left(\xi + \beta\chi\right)}\right] \tag{33}$$

Ce ratio est supérieur à celui de la maximisation du produit net. En effet, pour c et Q données, le numérateur $\frac{\gamma}{\varepsilon} + \mu_p N \frac{c}{Q}\left(\xi + \beta\chi\right)$ est supérieur au dénominateur $\frac{\gamma}{\varepsilon} + \mu_c N \frac{c}{Q}\left(\xi + \beta\chi\right)$ car les services de transport routiers rejettent davantage d'émissions que le transport ferroviaire $\mu_p > \mu_c$. La maximisation de l'utilité implique un ratio plus favorable aux investissements dédiés aux infrastructures de transport ferroviaire.

Cette partie doit être complétée.

Annexe

A Calcul de l'optimum de la firme

Le programme d'optimisation de la firme correspond à la maximisation du profit sous les contraintes de capacité des infrastructures de transport:

$$\begin{cases} \underset{\{K_t, L_t, H_{ct}, H_{pt}\}}{\text{Max}} & \Pi(K_t, L_t, H_{ct}, H_{pt}) \\ \text{s.c.} & H_{ct} \leq \bar{H}_{ct} \\ & H_{pt} \leq \bar{H}_{pt} \end{cases}$$

Le Lagrangien associé de ce programme d'optimisation est une fonction $\mathcal{L}$ qui combine la fonction objectif Π et les contraintes de capacité des infrastructures:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = F(K_t, L_t, H_{ct}, H_{pt}) - w_t L_t - R_t K_t - z_c H_{ct} - z_p H_{pt} \\ + \lambda_{ct}(\bar{H}_{ct} - H_{ct}) + \lambda_{pt}(\bar{H}_{pt} - H_{pt}) \end{aligned}$$

Proposition 4 *Si $(K_t, L_t, H_{ct}, H_{pt}, \lambda_{ct}, \lambda_{pt})$ est une solution du programme d'optimisation alors les conditions nécessaires de Kuhn et Tucker sont réalisées à l'optimum de la firme:*

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_t} = 0 \Leftrightarrow \alpha_k A K_t^{\alpha_k - 1} L_t^{\alpha_l} H_{ct}^{\alpha_{ct}} H_{pt}^{\alpha_{pt}} - R_t = 0 \tag{34}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_t} = 0 \Leftrightarrow \alpha_l A K_t^{\alpha_k} L_t^{\alpha_l - 1} H_{ct}^{\alpha_{ct}} H_{pt}^{\alpha_{pt}} - w_t = 0 \tag{35}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial H_{ct}} = 0 \Leftrightarrow \alpha_c A K_t^{\alpha_k} L_t^{\alpha_l} H_{ct}^{\alpha_{ct} - 1} H_{pt}^{\alpha_{pt}} - z_c - \lambda_{ct} = 0 \tag{36}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial H_{pt}} = 0 \Leftrightarrow \alpha_p A K_t^{\alpha_k} L_t^{\alpha_l} H_{ct}^{\alpha_{ct}} H_{pt}^{\alpha_{pt} - 1} - z_p - \lambda_{pt} = 0 \tag{37}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_{ct}} \geq 0 \Leftrightarrow \bar{H}_{ct} - H_{ct} \geq 0 \tag{38}$$

$$\lambda_{ct} \geq 0 \tag{39}$$

$$\lambda_{ct} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_{ct}} = 0 \Leftrightarrow \lambda_{ct}(\bar{H}_{ct} - H_{ct}) = 0 \tag{40}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_{pt}} \geq 0 \Leftrightarrow \bar{H}_{pt} - H_{pt} \geq 0 \tag{41}$$

$$\lambda_{pt} \geq 0 \tag{42}$$

$$\lambda_{pt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_{pt}} = 0 \Leftrightarrow \lambda_{pt}(\bar{H}_{pt} - H_{pt}) = 0 \tag{43}$$

Ces conditions sont également suffisantes car la fonction $F(K_t, L_t, H_{ct}, H_{pt})$ est concave.

Les expressions (34),(35),(36) et (37) correspondent aux conditions du premier ordre standards. (38) et (41) permettent de retrouver l'expression des contraintes. Enfin, les expressions (39),(40),(42) et (43) forment les conditions d'exclusion.

La fonction de production $F(K_t, L_t, H_{ct}, H_{pt})$ a la propriété d'être homogène de degré 1. On peut ainsi l'exprimer de la manière suivante:

$$F(K_t, L_t, H_{ct}, H_{pt}) = LF(\frac{K_t}{L_t}, 1, \frac{H_{ct}}{L_t}, \frac{H_{pt}}{L_t}) = Lf(k_t, h_{ct}, h_{pt})$$

où $f(k_t, h_{ct}, h_{pt})$ est la fonction de production en terme intensif. Étant donné cette propriété, les conditions (34), (35), (36) et (37) deviennent:

$$\alpha_k A k_t^{\alpha_k - 1} h_{ct}^{\alpha_c} h_{pt}^{\alpha_p} = R_t \tag{44}$$
$$\alpha_l A k_t^{\alpha_k} h_{ct}^{\alpha_c} h_{pt}^{\alpha_p} = w_t \tag{45}$$
$$\alpha_c A k_t^{\alpha_k} h_{ct}^{\alpha_c - 1} h_{pt}^{\alpha_p} = z_c + \lambda_{ct} \tag{46}$$
$$\alpha_p A k_t^{\alpha_k} h_{ct}^{\alpha_c} h_{pt}^{\alpha_p - 1} = z_p + \lambda_{pt} \tag{47}$$

car les dérivées partielles premières d'une fonction homogène de degré 1 le sont de degré 0. Nous retenons cette forme intensive pour la poursuite de l'analyse.

A l'optimum de la firme, on retrouve un système de quatre équations à trois inconnues k_t, h_{ct}, h_{pt}. Les prix ainsi que les paramètres sont données. On peut dès lors exprimer les quantités demandées en fonction de ces données. Néanmoins, compte tenu de l'hypothèse de saturation des infrastructures, les conditions du problème d'optimisation sont à étudier selon quatre régimes différents.

Régime A

$$(44) \rightarrow \alpha_k A \tilde{k}_t^{\alpha_k - 1} \tilde{h}_{ct}^{\alpha_c} \tilde{h}_{pt}^{\alpha_p} = R_t$$
$$(45) \rightarrow \alpha_l A \tilde{k}_t^{\alpha_k} \tilde{h}_{ct}^{\alpha_c} \tilde{h}_{pt}^{\alpha_p} = w_t$$
$$(46) \rightarrow \alpha_c A \tilde{k}_t^{\alpha_k} \tilde{h}_{ct}^{\alpha_c - 1} \tilde{h}_{pt}^{\alpha_p} = z_c$$
$$(47) \rightarrow \alpha_p A \tilde{k}_t^{\alpha_k} \tilde{h}_{ct}^{\alpha_c} \tilde{h}_{pt}^{\alpha_p - 1} = z_p$$

$$\frac{(44)}{(45)}:\frac{\alpha_k A\tilde{k}_t^{\alpha_k-1}\tilde{h}_{ct}^{\alpha_c}\tilde{h}_{pt}^{\alpha_p}}{\alpha_l A\tilde{k}_t^{\alpha_k}\tilde{h}_{ct}^{\alpha_c}\tilde{h}_{pt}^{\alpha_p}}=\frac{R_t}{w_t}\Leftrightarrow \tilde{k}_t=\frac{\alpha_k}{\alpha_l}\frac{w_t}{R_t}$$

$$\frac{(46)}{(45)}:\frac{\alpha_c A\tilde{k}_t^{\alpha_k}\tilde{h}_{ct}^{\alpha_c-1}\tilde{h}_{pt}^{\alpha_p}}{\alpha_l A\tilde{k}_t^{\alpha_k}\tilde{h}_{ct}^{\alpha_c}\tilde{h}_{pt}^{\alpha_p}}=\frac{(q_{ct}-\tau_{ct}+\gamma)}{w_t}\Leftrightarrow \tilde{h}_{ct}=\frac{\alpha_c}{\alpha_l}\frac{w_t}{z_c}$$

$$\frac{(47)}{(45)}:\frac{\alpha_p A\tilde{k}_t^{\alpha_k}\tilde{h}_{ct}^{\alpha_c}\tilde{h}_{pt}^{\alpha_p-1}}{\alpha_l A\tilde{k}_t^{\alpha_k}\tilde{h}_{ct}^{\alpha_c}\tilde{h}_{pt}^{\alpha_p}}=\frac{(q_{pt}+\tau_{pt}+\gamma)}{w_t}\Leftrightarrow \tilde{h}_{pt}=\frac{\alpha_p}{\alpha_l}\frac{w_t}{z_p}$$

La solution $(\tilde{k}_t,\tilde{h}_{ct},\tilde{h}_{pt})$ doit vérifier:

$$\tilde{h}_{ct}<\bar{h}_{ct}\text{ et }\tilde{h}_{pt}<\bar{h}_{pt}\Leftrightarrow \tilde{h}_{ct}<\varepsilon g_{ct}\text{ et }\tilde{h}_{pt}<\varepsilon g_{pt}$$

Soit:

$$g_{ct}>\frac{\alpha_c}{\alpha_l}\frac{1}{\varepsilon}\frac{w_t}{z_c}\text{ et }g_{pt}>\frac{\alpha_p}{\alpha_l}\frac{1}{\varepsilon}\frac{w_t}{z_p}$$

Régime B

$$\begin{aligned}
(44)&\rightarrow \alpha_k A\hat{k}_t^{\alpha_k-1}\hat{h}_{ct}^{\alpha_c}\hat{h}_{pt}^{\alpha_p}=R_t\\
(45)&\rightarrow \alpha_l A\hat{k}_t^{\alpha_k}\hat{h}_{ct}^{\alpha_c}\hat{h}_{pt}^{\alpha_p}=w_t\\
(46)&\rightarrow \alpha_c A\hat{k}_t^{\alpha_k}\hat{h}_{ct}^{\alpha_c-1}\hat{h}_{pt}^{\alpha_p}=z_c+\hat{\lambda}_{ct}\\
(47)&\rightarrow \alpha_p A\hat{k}_t^{\alpha_k}\hat{h}_{ct}^{\alpha_c}\hat{h}_{pt}^{\alpha_p-1}=z_p
\end{aligned}$$

$$\frac{(44)}{(45)}:\frac{\alpha_k A\hat{k}_t^{\alpha_k-1}\hat{h}_{ct}^{\alpha_c}\hat{h}_{pt}^{\alpha_p}}{\alpha_l A\hat{k}_t^{\alpha_k}\hat{h}_{ct}^{\alpha_c}\hat{h}_{pt}^{\alpha_p}}=\frac{R_t}{w_t}\Leftrightarrow \hat{k}_t=\frac{\alpha_k}{\alpha_l}\frac{w_t}{R_t}$$

$$\frac{(46)}{(45)}:\frac{\alpha_c A\hat{k}_t^{\alpha_k}\hat{h}_{ct}^{\alpha_c-1}\hat{h}_{pt}^{\alpha_p}}{\alpha_l A\hat{k}_t^{\alpha_k}\hat{h}_{ct}^{\alpha_c}\hat{h}_{pt}^{\alpha_p}}=\frac{z_c+\hat{\lambda}_{ct}}{w_t}\Leftrightarrow \hat{h}_{ct}=\frac{\alpha_c}{\alpha_l}\frac{w_t}{z_c+\hat{\lambda}_{ct}}$$

$$\frac{(47)}{(45)}:\frac{\alpha_p A\hat{k}_t^{\alpha_k}\hat{h}_{ct}^{\alpha_c}\hat{h}_{pt}^{\alpha_p-1}}{\alpha_l A\hat{k}_t^{\alpha_k}\hat{h}_{ct}^{\alpha_c}\hat{h}_{pt}^{\alpha_p}}=\frac{z_p}{w_t}\Leftrightarrow \hat{h}_{pt}=\frac{\alpha_p}{\alpha_l}\frac{w_t}{z_p}$$

La solution $(\hat{k}_t,\hat{h}_{ct},\hat{h}_{pt})$ doit vérifier:

$$\hat{h}_{ct}=\bar{h}_{ct}\text{ et }\hat{h}_{pt}<\bar{h}_{pt}\Leftrightarrow \hat{h}_{ct}=\varepsilon g_{ct}\text{ et }\hat{h}_{pt}<\varepsilon g_{pt}$$

Soit:

$$g_{ct}=\frac{\alpha_c}{\alpha_l}\frac{1}{\varepsilon}\frac{w_t}{z_c+\hat{\lambda}_{ct}}\text{ et }g_{pt}>\frac{\alpha_p}{\alpha_l}\frac{1}{\varepsilon}\frac{w_t}{z_p}$$

Déterminons l'expression de $\hat{\lambda}_{ct}$:

$$\begin{aligned}\varepsilon g_{ct} &= \frac{\alpha_c}{\alpha_l}\frac{w_t}{z_c+\hat{\lambda}_{ct}}\\ \Leftrightarrow \hat{\lambda}_{ct} &= \frac{\alpha_c}{\alpha_l}w_t\frac{1}{\varepsilon g_{ct}}-z_c\end{aligned}$$

Or $\hat{\lambda}_{ct}>0$ donc:

$$\frac{\alpha_c}{\alpha_l}w_t\frac{1}{\varepsilon g_{ct}}-z_c>0$$

Soit:

$$g_{ct}<\frac{\alpha_c}{\alpha_l}\frac{1}{\varepsilon}\frac{w_t}{z_c}$$

Régime C

$$\begin{aligned}(44) &\rightarrow \alpha_k A\check{k}_t^{\alpha_k-1}\check{h}_{ct}^{\alpha_c}\check{h}_{pt}^{\alpha_p}=R_t\\ (45) &\rightarrow \alpha_l A\check{k}_t^{\alpha_k}\check{h}_{ct}^{\alpha_c}\check{h}_{pt}^{\alpha_p}=w_t\\ (46) &\rightarrow \alpha_c A\check{k}_t^{\alpha_k}\check{h}_{ct}^{\alpha_c-1}\check{h}_{pt}^{\alpha_p}=z_c\\ (47) &\rightarrow \alpha_p A\check{k}_t^{\alpha_k}\check{h}_{ct}^{\alpha_c}\check{h}_{pt}^{\alpha_p-1}=z_p+\check{\lambda}_{pt}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{(44)}{(45)}&:\frac{\alpha_k A\check{k}_t^{\alpha_k-1}\check{h}_{ct}^{\alpha_c}\check{h}_{pt}^{\alpha_p}}{\alpha_l A\check{k}_t^{\alpha_k}\check{h}_{ct}^{\alpha_c}\check{h}_{pt}^{\alpha_p}}=\frac{R_t}{w_t}\Leftrightarrow \check{k}_t=\frac{\alpha_k}{\alpha_l}\frac{w_t}{R_t}\\ \frac{(46)}{(45)}&:\frac{\alpha_c A\check{k}_t^{\alpha_k}\check{h}_{ct}^{\alpha_c-1}\check{h}_{pt}^{\alpha_p}}{\alpha_l A\check{k}_t^{\alpha_k}\check{h}_{ct}^{\alpha_c}\check{h}_{pt}^{\alpha_p}}=\frac{z_c}{w_t}\Leftrightarrow \check{h}_{ct}=\frac{\alpha_c}{\alpha_l}\frac{w_t}{z_c}\\ \frac{(47)}{(45)}&:\frac{\alpha_p A\check{k}_t^{\alpha_k}\check{h}_{ct}^{\alpha_c}\check{h}_{pt}^{\alpha_p-1}}{\alpha_l A\check{k}_t^{\alpha_k}\check{h}_{ct}^{\alpha_c}\check{h}_{pt}^{\alpha_p}}=\frac{z_p+\check{\lambda}_{pt}}{w_t}\Leftrightarrow \check{h}_{pt}=\frac{\alpha_p}{\alpha_l}\frac{w_t}{z_p+\check{\lambda}_{pt}}\end{aligned}$$

La solution $(\check{k}_t,\check{h}_{ct},\check{h}_{pt})$ doit vérifier:

$$\check{h}_{ct}<\bar{h}_{ct}\text{ et }\check{h}_{pt}=\bar{h}_{pt}\Leftrightarrow \check{h}_{ct}<\varepsilon g_{ct}\text{ et }\check{h}_{pt}=\varepsilon g_{pt}$$

Soit:

$$g_{ct}>\frac{\alpha_c}{\alpha_l}\frac{1}{\varepsilon}\frac{w_t}{z_c}\text{ et }g_{pt}=\frac{\alpha_p}{\alpha_l}\frac{1}{\varepsilon}\frac{w_t}{z_p+\check{\lambda}_{pt}}$$

Déterminons l'expression de $\check{\lambda}_{pt}$:

$$\begin{aligned}\varepsilon g_{pt} &= \frac{\alpha_p}{\alpha_l}\frac{w_t}{z_p+\check{\lambda}_{pt}}\\ \Leftrightarrow \check{\lambda}_{pt} &= \frac{\alpha_p}{\alpha_l}w_t\frac{1}{\varepsilon g_{pt}}-z_p\end{aligned}$$

Or $\check{\lambda}_{pt} > 0$ donc:

$$\frac{\alpha_p}{\alpha_l} w_t \frac{1}{\varepsilon g_{pt}} - z_p > 0$$

Soit:

$$g_{pt} < \frac{\alpha_p}{\alpha_l} \frac{1}{\varepsilon} \frac{w_t}{z_p}$$

Régime D

$$\begin{aligned}
(44) &\rightarrow \alpha_k A \mathring{k}_t^{\alpha_k - 1} \mathring{h}_{ct}^{\alpha_c} \mathring{h}_{pt}^{\alpha_p} = R_t \\
(45) &\rightarrow \alpha_l A \mathring{k}_t^{\alpha_k} \mathring{h}_{ct}^{\alpha_c} \mathring{h}_{pt}^{\alpha_p} = w_t \\
(46) &\rightarrow \alpha_c A \mathring{k}_t^{\alpha_k} \mathring{h}_{ct}^{\alpha_c - 1} \mathring{h}_{pt}^{\alpha_p} = z_c + \mathring{\lambda}_{ct} \\
(47) &\rightarrow \alpha_p A \mathring{k}_t^{\alpha_k} \mathring{h}_{ct}^{\alpha_c} \mathring{h}_{pt}^{\alpha_p - 1} = z_p + \mathring{\lambda}_{pt}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{(44)}{(45)} &: \frac{\alpha_k A \mathring{k}_t^{\alpha_k - 1} \mathring{h}_{ct}^{\alpha_c} \mathring{h}_{pt}^{\alpha_p}}{\alpha_l A \mathring{k}_t^{\alpha_k} \mathring{h}_{ct}^{\alpha_c} \mathring{h}_{pt}^{\alpha_p}} = \frac{R_t}{w_t} \Leftrightarrow \mathring{k}_t = \frac{\alpha_k}{\alpha_l} \frac{w_t}{R_t} \\
\frac{(46)}{(45)} &: \frac{\alpha_c A \mathring{k}_t^{\alpha_k} \mathring{h}_{ct}^{\alpha_c - 1} \mathring{h}_{pt}^{\alpha_p}}{\alpha_l A \mathring{k}_t^{\alpha_k} \mathring{h}_{ct}^{\alpha_c} \mathring{h}_{pt}^{\alpha_p}} = \frac{z_c + \mathring{\lambda}_{ct}}{w_t} \Leftrightarrow \mathring{h}_{ct} = \frac{\alpha_c}{\alpha_l} \frac{w_t}{z_c + \mathring{\lambda}_{ct}} \\
\frac{(47)}{(45)} &: \frac{\alpha_p A \mathring{k}_t^{\alpha_k} \mathring{h}_{ct}^{\alpha_c} \mathring{h}_{pt}^{\alpha_p - 1}}{\alpha_l A \mathring{k}_t^{\alpha_k} \mathring{h}_{ct}^{\alpha_c} \mathring{h}_{pt}^{\alpha_p}} = \frac{z_p + \mathring{\lambda}_{pt}}{w_t} \Leftrightarrow \mathring{h}_{pt} = \frac{\alpha_p}{\alpha_l} \frac{w_t}{z_p + \mathring{\lambda}_{pt}}
\end{aligned}$$

La solution $(\mathring{k}_t, \mathring{h}_{ct}, \mathring{h}_{pt})$ doit vérifier:

$$\mathring{h}_{ct} = \bar{h}_{ct} \text{ et } \mathring{h}_{pt} = \bar{h}_{pt} \Leftrightarrow \mathring{h}_{ct} = \varepsilon g_{ct} \text{ et } \mathring{h}_{pt} = \varepsilon g_{pt}$$

Soit:

$$\varepsilon g_{ct} = \frac{\alpha_c}{\alpha_l} \frac{w_t}{z_c + \mathring{\lambda}_{ct}} \text{ et } \varepsilon g_{pt} = \frac{\alpha_p}{\alpha_l} \frac{w_t}{z_p + \mathring{\lambda}_{pt}}$$

D'où:

$$\begin{aligned}
\mathring{\lambda}_{ct} &= \frac{\alpha_c}{\alpha_l} w_t \frac{1}{\varepsilon g_{ct}} - z_c \\
\mathring{\lambda}_{pt} &= \frac{\alpha_p}{\alpha_l} w_t \frac{1}{\varepsilon g_{pt}} - z_p
\end{aligned}$$

Or $\mathring{\lambda}_{ct} > 0$ et $\mathring{\lambda}_{pt} > 0$ donc:

$$\begin{aligned}
g_{ct} &< \frac{\alpha_c}{\alpha_l} \frac{1}{\varepsilon} \frac{w_t}{z_c} \\
g_{pt} &< \frac{\alpha_p}{\alpha_l} \frac{1}{\varepsilon} \frac{w_t}{z_p}
\end{aligned}$$

B Calcul de l'équilibre temporaire

Régime A

Dans ce régime, la firme demande les quantités $\tilde{h}_{ct}^{d} < \bar{h}_{ct}$ et $\tilde{h}_{pt}^{d} < \bar{h}_{pt}$. Le gouvernement offre de manière parfaitement élastique h_{ct}^{s} et h_{pt}^{s} aux prix z_c et z_p. Dans un premier temps, déterminons les quantités d'équilibre $\tilde{h}_{ct}$ et $\tilde{h}_{pt}$

$$\tilde{h}_{ct} = \frac{\alpha_c}{\alpha_l}\frac{\tilde{w}_t}{z_c} = \frac{\alpha_c A k_t^{\alpha_k} \tilde{h}_{ct}^{\alpha_c} \tilde{h}_{pt}^{\alpha_p}}{z_c} \tag{48}$$

$$\tilde{h}_{pt} = \frac{\alpha_p}{\alpha_l}\frac{\tilde{w}_t}{z_p} = \frac{\alpha_p A k_t^{\alpha_k} \tilde{h}_{ct}^{\alpha_c} \tilde{h}_{pt}^{\alpha_p}}{z_p} \tag{49}$$

$$\frac{(48)}{(49)} \Leftrightarrow \frac{\tilde{h}_{ct}}{\tilde{h}_{pt}} = \frac{\alpha_c}{\alpha_p}\frac{z_p}{z_c}$$

D'où

$$\tilde{h}_{ct} = \frac{\alpha_c}{\alpha_p}\frac{z_p}{z_c}\tilde{h}_{pt} \tag{50}$$

$$\tilde{h}_{pt} = \frac{\alpha_p}{\alpha_c}\frac{z_c}{z_p}\tilde{h}_{ct} \tag{51}$$

Substituons $\tilde{h}_{pt}$ dans (48) par (51) et $\tilde{h}_{ct}$ dans (49) par (50) pour retrouver les quantités d'équilibre

$$\tilde{h}_{ct} = \frac{\alpha_c}{z_c}\left[A k_t^{\alpha_k}\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_l}}$$

$$\tilde{h}_{pt} = \frac{\alpha_p}{z_p}\left[A k_t^{\alpha_k}\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_l}}$$

On en déduit le produit par tête $\tilde{y}_t$

$$\begin{aligned}
\tilde{y}_t =& A k_t^{\alpha_k} \tilde{h}_{ct}^{\alpha_c} \tilde{h}_{pt}^{\alpha_p} \\
=& A k_t^{\alpha_k}\left[\frac{\alpha_c}{z_c}\left[A k_t^{\alpha_k}\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_l}}\right]^{\alpha_c}\left[\frac{\alpha_p}{z_p}\left[A k_t^{\alpha_k}\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_l}}\right]^{\alpha_p} \\
=& \left[A k_t^{\alpha_k}\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{1+\frac{\alpha_c}{\alpha_k+\alpha_l}+\frac{\alpha_p}{\alpha_k+\alpha_l}} \\
=& \left[A k_t^{\alpha_k}\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_l}}
\end{aligned}$$

Soit

$$\tilde{y}_t \equiv \tilde{y}(k_t, z_c, z_p) \tag{52}$$

On peut alors écrire $\tilde{h}_{ct}$ et $\tilde{h}_{pt}$ de la manière suivante

$$\tilde{h}_{ct} = \frac{\alpha_c}{z_c}\tilde{y}_t \tag{53}$$

$$\tilde{h}_{pt} = \frac{\alpha_p}{z_p}\tilde{y}_t \tag{54}$$

Par conséquent, les flux d'émissions polluantes résultants du trafic s'écrivent

$$\begin{aligned}\tilde{M}_{ct} &= \mu_c N \tilde{h}_{ct}\\ &= \mu_c \frac{\alpha_c}{z_c} N \tilde{y}_t \end{aligned}\tag{55}$$

$$\begin{aligned}\tilde{M}_{pt} &= \mu_p N \tilde{h}_{pt}\\ &= \mu_p \frac{\alpha_p}{z_p} N \tilde{y}_t \end{aligned}\tag{56}$$

Dans un second temps, exprimons le prix d'équilibre du facteur travail et capital.

Prix d'équilibre

$$\tilde{w}_t = \alpha_l A k_t^{\alpha_k} \tilde{h}_{ct}^{\alpha_c} \tilde{h}_{pt}^{\alpha_p}$$

Soit

$$\tilde{w}_t = \alpha_l \tilde{y}_t \tag{57}$$

Et

$$\tilde{R}_t = \alpha_k A k_t^{\alpha_k - 1} \tilde{h}_{ct}^{\alpha_c} \tilde{h}_{pt}^{\alpha_p}$$

Soit

$$\tilde{R}_t = \alpha_k \frac{1}{k_t} \tilde{y}_t \tag{58}$$

Les développements ci-dessus ont permis de déterminer les quantités et les prix d'équilibre de chacun des facteurs. A présent, exprimons le montant des transferts $\tilde{\theta}_{ct}$ et $\tilde{\theta}_{pt}$ en fonction des données de façon à ce que le budget du gouvernement soit équilibré.

Transferts

$$z_c \tilde{h}_{ct} + \tilde{\theta}_{ct} = \eta_c \tilde{y}_t$$
$$z_p \tilde{h}_{pt} + \tilde{\theta}_{pt} = \eta_p \tilde{y}_t$$

Soit

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_{ct} &= \eta_c \tilde{y}_t - z_c \tilde{h}_{ct}\\ &= \eta_c \tilde{y}_t - z_c \frac{\alpha_c}{z_c}\tilde{y}_t\\ &= (\eta_c - \alpha_c)\tilde{y}_t \end{aligned}\tag{59}$$

Et

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_{pt} &= \eta_p \tilde{y}_t - z_p \tilde{h}_{pt} \\ &= \eta_p \tilde{y}_t - z_p \frac{\alpha_p}{z_p} \tilde{y}_t \\ &= (\eta_p - \alpha_p) \tilde{y}_t \end{aligned} \tag{60}$$

Enfin, à partir du salaire et des transferts, on peut exprimer la consommation et l'épargne des jeunes actifs ainsi que la consommation des vieux sur la même période.

Variables par tête

$$\begin{aligned}\tilde{s}_t &= \frac{\beta}{1+\beta} \left(\tilde{w}_t - \tilde{\theta}_{ct} - \tilde{\theta}_{pt} \right) \\ &= \frac{\beta}{1+\beta} \left[\alpha_l \tilde{y}_t - \left[(\eta_c - \alpha_c) \tilde{y}_t \right] - \left[(\eta_p - \alpha_p) \tilde{y}_t \right] \right] \end{aligned}$$

Soit

$$\tilde{s}_t = \frac{\beta}{1+\beta} \left[\alpha_l - (\eta_c - \alpha_c) - (\eta_p - \alpha_p) \right] \tilde{y}_t \tag{61}$$

De la même manière on obtient

$$\tilde{c}_t = \frac{1}{1+\beta} \left[\alpha_l - (\eta_c - \alpha_c) - (\eta_p - \alpha_p) \right] \tilde{y}_t \tag{62}$$

Enfin

$$\begin{aligned}\tilde{d}_t &= s_{t-1} \tilde{R}_t \\ &= k_t \alpha_k \frac{1}{k_t} \tilde{y}_t \\ &= \alpha_k \tilde{y}_t \end{aligned} \tag{63}$$

Régime B

Dans ce régime, la firme demande les quantités $\hat{h}^d_{ct} = \bar{h}_{ct}$ et $\hat{h}^d_{pt} < \bar{h}_{pt}$. Pour un niveau $\bar{h}_{ct}$ la firme doit s'acquitter du prix $z_c + \hat{\lambda}_{ct}$. L'offre h^s_{pt} reste parfaitement élastique au prix z_p. Déterminons dans un premier temps la quantité d'équilibre $\hat{h}_{pt}$:

$$\hat{h}_{ct} = \bar{h}_{ct} = \varepsilon g_{ct} = \frac{\alpha_c}{\alpha_l} \frac{\hat{w}_t}{z_c + \hat{\lambda}_{ct}} \tag{64}$$

$$\hat{h}_{pt} = \frac{\alpha_p}{\alpha_l} \frac{\hat{w}_t}{z_p} \tag{65}$$

$$\frac{(65)}{(64)} \Leftrightarrow \hat{h}_{pt} = \frac{\alpha_p}{\alpha_c} \frac{z_c + \hat{\lambda}_{ct}}{z_p} \varepsilon g_{ct} \tag{66}$$

Or

$$
\begin{aligned}
z_c + \hat{\lambda}_{ct} &= \alpha_c A k_t^{\alpha_k} \left(\varepsilon g_{ct}\right)^{\alpha_c - 1} \hat{h}_{pt}^{\alpha_p} \\
&= \alpha_c A k_t^{\alpha_k} \left(\varepsilon g_{ct}\right)^{\alpha_c - 1} \left[\frac{\alpha_p}{\alpha_c} \frac{z_c + \hat{\lambda}_{ct}}{z_p} \varepsilon g_{ct}\right]^{\alpha_p} \\
&= \frac{\alpha_c}{\varepsilon g_{ct}} \left[A k_t^{\alpha_k} \left(\varepsilon g_{ct}\right)^{\alpha_c} \left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_p}}
\end{aligned}
$$

D'où

$$
\hat{h}_{pt} = \frac{\alpha_p}{z_p} \left[A k_t^{\alpha_k} \left(\varepsilon g_{ct}\right)^{\alpha_c} \left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_p}}
$$

On en déduit le produit par tête $\hat{y}_t$

$$
\begin{aligned}
\hat{y}_t =& A k_t^{\alpha_k} \left(\varepsilon g_{ct}\right)^{\alpha_c} \hat{h}_{pt}^{\alpha_p} \\
=& A k_t^{\alpha_k} \left(\varepsilon g_{ct}\right)^{\alpha_c} \left[\frac{\alpha_p}{z_p} \left[A k_t^{\alpha_k} \left(\varepsilon g_{ct}\right)^{\alpha_c} \left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_p}}\right]^{\alpha_p} \\
=& \left[A k_t^{\alpha_k} \left(\varepsilon g_{ct}\right)^{\alpha_c} \left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_p}}
\end{aligned}
$$

Soit

$$
\hat{y}_t \equiv \hat{y}(k_t, g_{ct}, z_p) \tag{67}
$$

On peut alors écrire $\hat{h}_{pt}$ et $z_c + \hat{\lambda}_{ct}$ de la manière suivante

$$
\hat{h}_{pt} = \frac{\alpha_p}{z_p} \hat{y}_t \tag{68}
$$

$$
z_c + \hat{\lambda}_{ct} = \frac{\alpha_c}{\varepsilon g_{ct}} \hat{y}_t \tag{69}
$$

Par conséquent, les flux d'émissions polluantes résultants du trafic s'écrivent

$$
\begin{aligned}
\hat{M}_{ct} =& \mu_c N \bar{h}_{ct} \\
=& \mu_c \varepsilon N g_{ct} && (70) \\
\hat{M}_{pt} =& \mu_p N \hat{h}_{pt} \\
=& \mu_p \frac{\alpha_p}{z_p} N \hat{y}_t && (71)
\end{aligned}
$$

Dans un second temps, exprimons le prix d'équilibre du facteur travail et capital.

Prix d'équilibre

$$
\hat{w}_t = \alpha_l A k_t^{\alpha_k} \left(\varepsilon g_{ct}\right)^{\alpha_c} \hat{h}_{pt}^{\alpha_p}
$$

Soit

$$\hat{w}_t = \alpha_l \hat{y}_t \tag{72}$$

Et

$$\hat{R}_t = \alpha_k A k_t^{\alpha_k - 1} \left(\varepsilon g_{ct}\right)^{\alpha_c} \hat{h}_{pt}^{\alpha_p}$$

Soit

$$\hat{R}_t = \alpha_k \frac{1}{k_t} \hat{y}_t \tag{73}$$

Les développements ci-dessus ont permis de déterminer les quantités et les prix d'équilibre de chacun des facteurs. A présent, exprimons le montant des transferts $\hat{\theta}_{ct}$ et $\hat{\theta}_{pt}$ en fonction des données de façon à ce que le budget du gouvernement soit équilibré.

Transferts

$$\left(z_c + \hat{\lambda}_{ct}\right) \bar{h}_{ct} + \hat{\theta}_{ct} = \eta_c \hat{y}_t$$
$$z_p \hat{h}_{pt} + \hat{\theta}_{pt} = \eta_p \hat{y}_t$$

Soit

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_{ct} &= \eta_c \tilde{y}_t - \left(z_c + \hat{\lambda}_{ct}\right) \varepsilon g_{ct} \\
&= \eta_c \hat{y}_t - \frac{\alpha_c}{\varepsilon g_{ct}} \hat{y}_t \varepsilon g_{ct} \\
&= (\eta_c - \alpha_c) \hat{y}_t
\end{aligned} \tag{74}$$

Et

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_{pt} &= \eta_p \hat{y}_t - z_p \hat{h}_{pt} \\
&= \eta_p \hat{y}_t - z_p \frac{\alpha_p}{z_p} \hat{y}_t \\
&= (\eta_p - \alpha_p) \hat{y}_t
\end{aligned} \tag{75}$$

Enfin, à partir du salaire et des transferts, on peut exprimer la consommation et l'épargne des jeunes actifs ainsi que la consommation des vieux sur la même période.

Variables par tête

$$\begin{aligned}
\hat{s}_t &= \frac{\beta}{1+\beta} \left(\hat{w}_t - \hat{\theta}_{ct} - \hat{\theta}_{pt}\right) \\
&= \frac{\beta}{1+\beta} \left[\alpha_l \hat{y}_t - (\eta_c - \alpha_c)\, \hat{y}_t - (\eta_p - \alpha_p)\, \hat{y}_t\right]
\end{aligned}$$

Soit

$$\hat{s}_t = \frac{\beta}{1+\beta} \left[\alpha_l - (\eta_c - \alpha_c) - (\eta_p - \alpha_p)\right] \hat{y}_t \tag{76}$$

De la même manière on obtient

$$\hat{c}_t = \frac{1}{1+\beta}\big[\alpha_l - (\eta_c - \alpha_c) - (\eta_p - \alpha_p)\big]\hat{y}_t \tag{77}$$

Enfin

$$\begin{aligned}\hat{d}_t &= s_{t-1}\hat{R}_t \\ &= k_t \alpha_k \frac{1}{k_t}\hat{y}_t \\ &= \alpha_k \hat{y}_t \end{aligned} \tag{78}$$

Régime C

Dans ce régime, la firme demande les quantités $h^d_{ct} < \bar{h}_{ct}$ et $h^d_{pt} = \bar{h}_{pt}$. Pour un niveau $\bar{h}_{pt}$ la firme doit s'acquitter du prix $z_p + \check{\lambda}_{pt}$. L'offre h^s_{ct} reste parfaitement élastique au prix z_c. Déterminons dans un premier temps la quantité d'équilibre $\check{h}_{ct}$:

$$\check{h}_{ct} = \frac{\alpha_c}{\alpha_l}\frac{\check{w}_t}{z_c} \tag{79}$$

$$\check{h}_{pt} = \bar{h}_{pt} = \varepsilon g_{pt} = \frac{\alpha_p}{\alpha_l}\frac{\check{w}_t}{z_p + \check{\lambda}_{pt}} \tag{80}$$

$$\frac{(79)}{(80)} \Leftrightarrow \check{h}_{ct} = \frac{\alpha_c}{\alpha_p}\frac{z_p + \check{\lambda}_{pt}}{z_c}\varepsilon g_{pt} \tag{81}$$

Or

$$\begin{aligned} z_p + \check{\lambda}_{pt} &= \alpha_p A k_t^{\alpha_k} \check{h}_{ct}^{\alpha_c} \left(\varepsilon g_{pt}\right)^{\alpha_p - 1} \\ &= \alpha_p A k_t^{\alpha_k} \left[\frac{\alpha_c}{\alpha_p}\frac{z_p + \check{\lambda}_{pt}}{z_c}\varepsilon g_{pt}\right]^{\alpha_c} \left(\varepsilon g_{pt}\right)^{\alpha_p - 1} \\ &= \frac{\alpha_p}{\varepsilon g_{pt}}\left[A k_t^{\alpha_k}\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\left(\varepsilon g_{pt}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_c}} \end{aligned}$$

D'où

$$\check{h}_{ct} = \frac{\alpha_c}{z_c}\left[A k_t^{\alpha_k}\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\left(\varepsilon g_{pt}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_c}}$$

On en déduit le produit par tête $\check{y}_t$

$$\begin{aligned} \check{y}_t =& A k_t^{\alpha_k} \check{h}_{ct}^{\alpha_c} \left(\varepsilon g_{pt}\right)^{\alpha_p} \\ =& A k_t^{\alpha_k}\left[\frac{\alpha_c}{z_c}\left[A k_t^{\alpha_k}\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\left(\varepsilon g_{pt}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_c}}\right]^{\alpha_c}\left(\varepsilon g_{pt}\right)^{\alpha_p} \\ =& \left[A k_t^{\alpha_k}\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\left(\varepsilon g_{pt}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_c}} \end{aligned}$$

Soit
$$\check{y}_t \equiv \check{y}(k_t, g_{pt}, z_c) \tag{82}$$
On peut alors écrire $\check{h}_{ct}$ et $z_p + \check{\lambda}_{pt}$ de la manière suivante
$$\check{h}_{ct} = \frac{\alpha_c}{z_c}\check{y}_t \tag{83}$$
$$z_p + \check{\lambda}_{pt} = \frac{\alpha_p}{\varepsilon g_{pt}}\check{y}_t \tag{84}$$
Par conséquent, les flux d'émissions polluantes résultants du trafic s'écrivent
$$\begin{aligned}\check{M}_{ct} &= \mu_c N \check{h}_{ct} \\ &= \mu_c \frac{\alpha_c}{z_c} N \check{y}_t\end{aligned} \tag{85}$$
$$\begin{aligned}\check{M}_{pt} &= \mu_p N \bar{h}_{pt} \\ &= \mu_p \varepsilon N g_{pt}\end{aligned} \tag{86}$$
Dans un second temps, exprimons le prix d'équilibre du facteur travail et capital.

Prix d'équilibre
$$\check{w}_t = \alpha_l A k_t^{\alpha_k} \check{h}_{ct}^{\alpha_c} \left(\varepsilon g_{pt}\right)^{\alpha_p}$$
Soit
$$\check{w}_t = \alpha_l \check{y}_t \tag{87}$$
Et
$$\check{R}_t = \alpha_k A k_t^{\alpha_k - 1} \check{h}_{ct}^{\alpha_c} \left(\varepsilon g_{pt}\right)^{\alpha_p}$$
Soit
$$\check{R}_t = \alpha_k \frac{1}{k_t}\check{y}_t \tag{88}$$
Les développements ci-dessus ont permis de déterminer les quantités et les prix d'équilibre de chacun des facteurs. A présent, exprimons le montant des transferts $\check{\theta}_{ct}$ et $\check{\theta}_{pt}$ en fonction des données de façon à ce que le budget du gouvernement soit équilibré.

Transferts
$$z_c \check{h}_{ct} + \check{\theta}_{ct} = \eta_c \check{y}_t$$
$$\left(z_p + \check{\lambda}_{pt}\right) \bar{h}_{pt} + \check{\theta}_{pt} = \eta_p \check{y}_t$$
Soit
$$\begin{aligned}\check{\theta}_{ct} &= \eta_c \check{y}_t - z_c \check{h}_{ct} \\ &= \eta_c \check{y}_t - z_c \frac{\alpha_c}{z_c}\check{y}_t \\ &= (\eta_c - \alpha_c)\check{y}_t\end{aligned} \tag{89}$$

Et

$$
\begin{aligned}
\check{\theta}_{pt} &= \eta_p \check{y}_t - \left(z_p + \check{\lambda}_{pt}\right) \bar{h}_{pt} \\
&= \eta_p \check{y}_t - \frac{\alpha_p}{\varepsilon g_{pt}} \check{y}_t \varepsilon g_{pt} \\
&= (\eta_p - \alpha_p) \check{y}_t \qquad (90)
\end{aligned}
$$

Enfin, à partir du salaire et des transferts, on peut exprimer la consommation et l'épargne des jeunes actifs ainsi que la consommation des vieux sur la même période.

Variables par tête

$$
\begin{aligned}
\check{s}_t &= \frac{\beta}{1+\beta} \left(\check{w}_t - \check{\theta}_{ct} - \check{\theta}_{pt}\right) \\
&= \frac{\beta}{1+\beta} \Big[\alpha_l \check{y}_t - \left[\,(\eta_c - \alpha_c)\, \check{y}_t\right] - \left[\,(\eta_p - \alpha_p)\, \check{y}_t\right]\Big]
\end{aligned}
$$

Soit

$$
\check{s}_t = \frac{\beta}{1+\beta} \big[\alpha_l - (\eta_c - \alpha_c) - (\eta_p - \alpha_p)\big] \check{y}_t \qquad (91)
$$

De la même manière on obtient

$$
\check{c}_t = \frac{1}{1+\beta} \big[\alpha_l - (\eta_c - \alpha_c) - (\eta_p - \alpha_p)\big] \check{y}_t \qquad (92)
$$

Enfin

$$
\begin{aligned}
\check{d}_t &= s_{t-1} \check{R}_t \\
&= k_t \alpha_k \frac{1}{k_t} \check{y}_t \\
&= \alpha_k \check{y}_t \qquad (93)
\end{aligned}
$$

Régime D

Dans ce régime, la firme demande les quantités $h^d_{ct} = \bar{h}_{ct}$ et $h^d_{pt} = \bar{h}_{pt}$. Pour un niveau $\bar{h}_{ct}$ et $\bar{h}_{pt}$ la firme doit s'acquitter des prix $z_c + \mathring{\lambda}_{ct}$ et $z_p + \mathring{\lambda}_{pt}$. La capacité maximale est donc atteinte sur chacune des infrastructures. On écrit alors

$$
\begin{aligned}
\mathring{h}_{ct} &= \bar{h}_{ct} = \varepsilon g_{ct} \qquad (94) \\
\mathring{h}_{pt} &= \bar{h}_{pt} = \varepsilon g_{pt} \qquad (95)
\end{aligned}
$$

Par conséquent, les flux d'émissions polluantes résultants du trafic s'écrivent

$$
\begin{aligned}
\mathring{M}_{ct} &= \mu_c \varepsilon N g_{ct} \qquad (96) \\
\mathring{M}_{pt} &= \mu_p \varepsilon N g_{pt} \qquad (97)
\end{aligned}
$$

On donne l'expression du produit par travailleur

$$\mathring{y}_t = Ak_t^{\alpha_k} \left(\varepsilon g_{ct}\right)^{\alpha_c} \left(\varepsilon g_{pt}\right)^{\alpha_p} \equiv \mathring{y}(k_t, g_{ct}, g_{pt}) \tag{98}$$

On détermine ensuite le prix d'équilibre de l'ensemble des facteurs de production.

Prix d'équilibre

$$\mathring{w}_t = Ak_t^{\alpha_k} \left(\varepsilon g_{ct}\right)^{\alpha_c} \left(\varepsilon g_{pt}\right)^{\alpha_p}$$

Soit

$$\mathring{w}_t = \alpha_l \mathring{y}_t \tag{99}$$

$$\mathring{R}_t = \alpha_k A k_t^{\alpha_k - 1} \left(\varepsilon g_{ct}\right)^{\alpha_c} \left(\varepsilon g_{pt}\right)^{\alpha_p}$$

Soit

$$\mathring{R}_t = \alpha_k \frac{1}{k_t} \mathring{y}_t \tag{100}$$

$$z_c + \mathring{\lambda}_{ct} = Ak_t^{\alpha_k} \left(\varepsilon g_{ct}\right)^{\alpha_c - 1} \left(\varepsilon g_{pt}\right)^{\alpha_p}$$

Soit

$$z_c + \mathring{\lambda}_{ct} = \frac{\alpha_c}{\varepsilon g_{ct}} \mathring{y}_t \tag{101}$$

$$z_p + \mathring{\lambda}_{pt} = Ak_t^{\alpha_k} \left(\varepsilon g_{ct}\right)^{\alpha_c} \left(\varepsilon g_{pt}\right)^{\alpha_p - 1}$$

Soit

$$z_p + \mathring{\lambda}_{pt} = \frac{\alpha_p}{\varepsilon g_{pt}} \mathring{y}_t \tag{102}$$

A présent, exprimons le montant des transferts $\mathring{\theta}_{ct}$ et $\mathring{\theta}_{pt}$ en fonction des données de façon à ce que le budget du gouvernement soit équilibré.

Transferts

$$\left(z_c + \mathring{\lambda}_{ct}\right) \bar{h}_{ct} + \mathring{\theta}_{ct} = \eta_c \mathring{y}_t$$
$$\left(z_p + \mathring{\lambda}_{pt}\right) \bar{h}_{pt} + \mathring{\theta}_{pt} = \eta_p \mathring{y}_t$$

Soit

$$\begin{aligned}
\mathring{\theta}_{ct} &= \eta_c \mathring{y}_t - \left(z_c + \mathring{\lambda}_{ct}\right) \varepsilon g_{ct} \\
&= \eta_c \mathring{y}_t - \frac{\alpha_c}{\varepsilon g_{ct}} \mathring{y}_t \varepsilon g_{ct} \\
&= (\eta_c - \alpha_c) \mathring{y}_t
\end{aligned} \tag{103}$$

Et

$$\begin{aligned}\mathring{\theta}_{pt} &= \eta_p \mathring{y}_t - \left(z_p + \mathring{\lambda}_{pt}\right) \varepsilon g_{pt} \\ &= \eta_p \mathring{y}_t - \frac{\alpha_p}{\varepsilon g_{pt}} \mathring{y}_t \varepsilon g_{pt} \\ &= (\eta_p - \alpha_p) \mathring{y}_t \qquad (104)\end{aligned}$$

Enfin, à partir du salaire et des transferts, on peut exprimer la consommation et l'épargne des jeunes actifs ainsi que la consommation des vieux sur la même période.

Variables par tête

$$\begin{aligned}\mathring{s}_t &= \frac{\beta}{1+\beta}\left(\mathring{w}_t - \mathring{\theta}_{ct} - \mathring{\theta}_{pt}\right) \\ &= \frac{\beta}{1+\beta}\left[\alpha_l \mathring{y}_t - \left[\,(\eta_c - \alpha_c)\,\mathring{y}_t\right] - \left[\,(\eta_p - \alpha_p)\,\mathring{y}_t\right]\right]\end{aligned}$$

Soit

$$\mathring{s}_t = \frac{\beta}{1+\beta}\big[\alpha_l - (\eta_c - \alpha_c) - (\eta_p - \alpha_p)\big]\mathring{y}_t \qquad (105)$$

De la même manière on obtient

$$\mathring{c}_t = \frac{1}{1+\beta}\big[\alpha_l - (\eta_c - \alpha_c) - (\eta_p - \alpha_p)\big]\mathring{y}_t \qquad (106)$$

Enfin

$$\begin{aligned}\mathring{d}_t &= s_{t-1}\mathring{R}_t \\ &= k_t \alpha_k \frac{1}{k_t}\mathring{y}_t \\ &= \alpha_k \mathring{y}_t \qquad (107)\end{aligned}$$

C Analyse dynamique

Régime A

On adapte le système dynamique décrit par (16), (17), et (18) en substituant la production par tête y_t par son expression $\tilde{y}(k_t)$, fonction croissante et concave avec $\tilde{y}(0) = 0$. Étant donnés k_t, g_{ct} et g_{pt}, si l'économie est caractérisée par le régime A, l'existence et l'unicité de l'équilibre inter-temporel sont garanties par

$$\begin{cases} k_{t+1} &= \frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\left[Ak_t^{\alpha_k}\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_l}} \\ g_{ct+1} &= (1-\gamma)g_{ct} + \eta_c\left[Ak_t^{\alpha_k}\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_l}} \\ g_{pt+1} &= (1-\gamma)g_{pt} + \eta_p\left[Ak_t^{\alpha_k}\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_l}} \end{cases}$$

où g_{ct} et g_{pt} respectent les conditions suivantes

$$g_{ct} > \underbrace{\frac{\alpha_c}{z_c}\frac{1}{\epsilon}\left[Ak_t^{\alpha_k}\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_l}}}_{\tilde{g}_{cst}}$$

$$g_{pt} > \underbrace{\frac{\alpha_p}{z_p}\frac{1}{\epsilon}\left[Ak_t^{\alpha_k}\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_l}}}_{\tilde{g}_{pst}}$$

L'étude de l'équation d'accumulation du capital privé k_{t+1} noté $h(k_t)$ donne

$$\begin{aligned}
h^{'}(k_t) &= \frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\tilde{y}^{'}(k_t) > 0 \\
h^{''}(k_t) &= \frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\tilde{y}^{''}(k_t) < 0 \\
&\lim_{k_t\to 0} h^{'}(k_t) = +\infty \text{ et } \lim_{k_t\to+\infty} h^{'}(k_t) = 0 \\
&\lim_{k_t\to+\infty} h(k_t) = +\infty
\end{aligned}$$

La dynamique du stock de capital privé est croissante et concave. Elle admet deux situations d'équilibre où $k_{t+1} = k_t$, $k = 0$ et $\tilde{k}^*$. Pour déterminer l'état stationnaire non trivial, on résout $h(k)$ telle que $k_{t+1} = k_t = k$. Soit

$$\begin{aligned}
k &= \frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\left[Ak^{\alpha_k}\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_l}} \\
k^{1-\frac{\alpha_k}{\alpha_k+\alpha_l}} &= \frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\left[A\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_l}} \\
\tilde{k}^* &= \left[\left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\alpha_k+\alpha_l} A\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_l}}
\end{aligned}$$

Étant donné que $\lim_{k_t\to 0} h^{'}(k_t) = +\infty$, $k = 0$ est un équilibre instable. La stabilité de l'équilibre $\tilde{k}^*$ est déterminée par

$$h'(\tilde{k}^*) = \frac{\alpha_k}{\alpha_k+\alpha_l} < 1$$

Quel que soit $k_0 > 0$, le stock de capital privé converge de façon régulière vers l'équilibre $\tilde{k}^*$. En effet, si $k_0 < \tilde{k}^*$ les valeurs k_t convergent en croissant tandis que si $k_0 > \tilde{k}^*$, celles-ci convergent en décroissant.

L'analyse de la dynamique k_t terminée on passe à celle du stock d'infrastructure

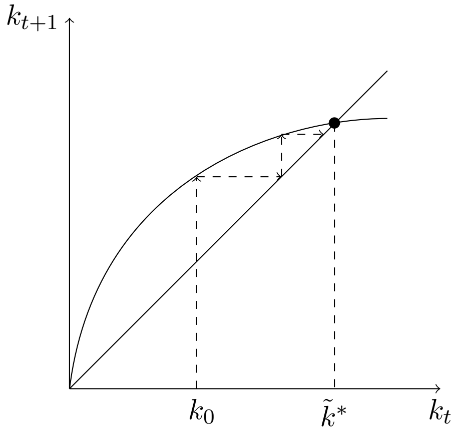

Figure 4: Dynamique du stock de capital privé k_t

g_{ct}. On cherche dans un premier temps à déterminer la ligne de phases $\tilde{\Delta}_{ct}$

$$\begin{aligned}
g_{ct+1} - g_{ct} = 0 &\iff (1-\gamma)g_{ct} + \eta_c \left[A k_t^{\alpha_k} \left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c} \left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p} \right]^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_l}} - g_{ct} = 0 \\
&\iff g_{ct} = \frac{\eta_c}{\gamma} \left[A k_t^{\alpha_k} \left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c} \left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p} \right]^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_l}} \\
&\iff g_{ct} = \frac{\eta_c}{\gamma} \tilde{y}(k_t) \equiv \tilde{\Delta}_c(k_t)
\end{aligned}$$

L'étude de cette ligne de phase donne

$$\begin{aligned}
&\tilde{\Delta}_c^{'}(k_t) = \frac{\eta_c}{\gamma} \tilde{y}^{'}(k_t) > 0 \\
&\tilde{\Delta}_c^{''}(k_t) = \frac{\eta_c}{\gamma} \tilde{y}^{''}(k_t) < 0 \\
&\lim_{k_t \to 0} \tilde{\Delta}_c^{'}(k_t) = +\infty \text{ et } \lim_{k_t \to +\infty} \tilde{\Delta}_c^{'}(k_t) = 0 \\
&\lim_{k_t \to +\infty} \tilde{\Delta}_c(k_t) = +\infty
\end{aligned}$$

Dans le plan (k_t, g_{ct}), la ligne de phases $\tilde{\Delta}_c(k_t)$ est croissante et concave. Si l'on représente également $\tilde{\Delta}_k = \tilde{k}^*$, l'intersection avec $\tilde{\Delta}_c(k_t)$ détermine la situation d'équilibre $\tilde{g}_c^*$.

$$\begin{aligned}
&\tilde{\Delta}_c(\tilde{k}^*) = \tfrac{\eta_c}{\gamma} \tilde{y}(\tilde{k}^*) \\
&\iff \tilde{g}_c^* = \tfrac{\eta_c}{\gamma} \left[A \left(\tfrac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c} \left(\tfrac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p} \right]^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_l}} \left[\left[\tfrac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\alpha_k+\alpha_l} A \left(\tfrac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c} \left(\tfrac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p} \right]^{\frac{\alpha_k}{\alpha_l(\alpha_k+\alpha_l)}} \\
&\iff \tilde{g}_c^* = \tfrac{\eta_c}{\gamma} \left[\left[\tfrac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\alpha_k} A \left(\tfrac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c} \left(\tfrac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p} \right]^{\frac{1}{\alpha_l}}
\end{aligned}$$

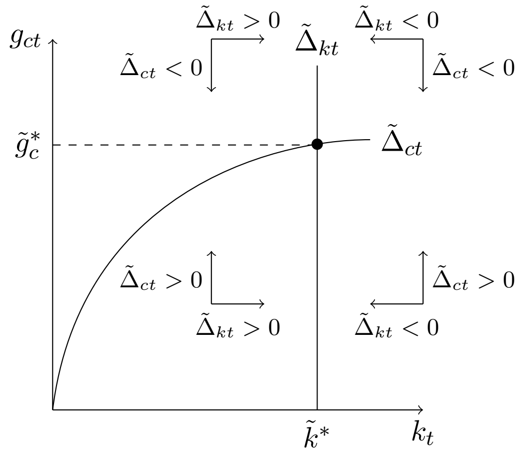

Figure 5: Dynamique du stock d'infrastructure g_{ct}

La convergence vers cette situation d'équilibre peut être déterminer à l'aide du diagramme des phases. On distingue ainsi quatre régions où chacune d'entre elle forme un bassin d'attraction.

$\tilde{\Delta}_c > 0$ *et* $\tilde{\Delta}_k > 0$: les suites (g_{ct}) et (k_t) sont croissantes

$\tilde{\Delta}_c > 0$ *et* $\tilde{\Delta}_k < 0$: (g_{ct}) croissante et (k_t) décroissante

$\tilde{\Delta}_c < 0$ *et* $\tilde{\Delta}_k > 0$: (g_{ct}) décroissante et (k_t) croissante

$\tilde{\Delta}_c < 0$ *et* $\tilde{\Delta}_k < 0$: les suites (g_{ct}) et (k_t) sont décroissantes

Pour déterminer l'état stationnaire de ce régime, on doit déterminer la valeur d'équilibre $\tilde{g}_p^*$.On cherche dans un premier temps à déterminer la ligne de phases $\tilde{\Delta}_{pt}$

$$
\begin{aligned}
g_{pt+1} - g_{pt} = 0 &\iff (1-\gamma)g_{pt} + \eta_p \left[A k_t^{\alpha_k} \left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c} \left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p} \right]^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_l}} - g_{pt} = 0 \\
&\iff g_{pt} = \frac{\eta_{cp}}{\gamma} \left[A k_t^{\alpha_k} \left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c} \left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p} \right]^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_l}} \\
&\iff g_{pt} = \frac{\eta_p}{\gamma} \tilde{y}(k_t) \\
&\iff \tilde{\Delta}_p(k_t)
\end{aligned}
$$

L'étude de cette ligne de phase donne

$$\tilde{\Delta}_p'(k_t) = \frac{\eta_p}{\gamma}\tilde{y}'(k_t) > 0$$
$$\tilde{\Delta}_p''(k_t) = \frac{\eta_p}{\gamma}\tilde{y}''(k_t) < 0$$
$$\lim_{k_t \to 0} \tilde{\Delta}_p'(k_t) = +\infty \text{ et } \lim_{k_t \to +\infty} \tilde{\Delta}_p'(k_t) = 0$$
$$\lim_{k_t \to +\infty} \tilde{\Delta}_p(k_t) = +\infty$$

Dans le plan (k_t, g_{pt}), la ligne de phases $\tilde{\Delta}_p(k_t)$ est croissante et concave.

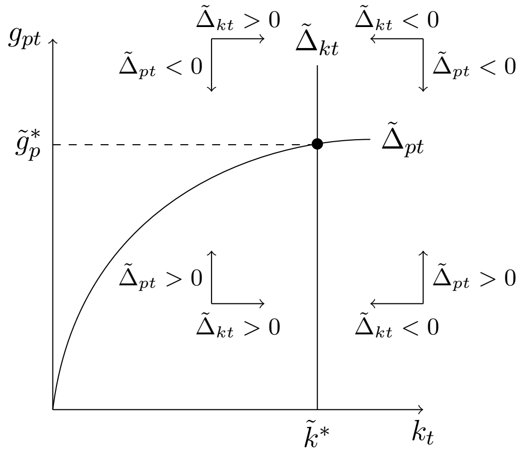

Figure 6: Dynamique du stock d'infrastructure g_{pt}

Si l'on représente également $\tilde{\Delta}_k = \tilde{k}^*$, l'intersection avec $\tilde{\Delta}_p(k_t)$ détermine la situation d'équilibre $\tilde{g}_p^*$.

$$\tilde{\Delta}_p(\tilde{k}^*) = \tfrac{\eta_p}{\gamma}\tilde{y}(\tilde{k}^*)$$
$$\Longleftrightarrow \; \tilde{g}_p^* = \tfrac{\eta_p}{\gamma}\left[A\left(\tfrac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\left(\tfrac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_l}}\left[\left[\tfrac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\alpha_k+\alpha_l} A\left(\tfrac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\left(\tfrac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{\alpha_k}{\alpha_l(\alpha_k+\alpha_l)}}$$
$$\Longleftrightarrow \; \tilde{g}_p^* = \tfrac{\eta_p}{\gamma}\left[\left[\tfrac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\alpha_k} A\left(\tfrac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\left(\tfrac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_l}}$$

La convergence vers cette situation d'équilibre peut être déterminer à l'aide du diagramme des phases. On distingue ainsi quatre régions où chacune d'entre elle forme un bassin d'attraction.

$\tilde{\Delta}_p > 0$ *et* $\tilde{\Delta}_k > 0$: les suites (g_{pt}) et (k_t) sont croissantes

$\tilde{\Delta}_p > 0$ *et* $\tilde{\Delta}_k < 0$: (g_{pt}) croissante et (k_t) décroissante

$\tilde{\Delta}_p < 0$ *et* $\tilde{\Delta}_k > 0$: (g_{pt}) décroissante et (k_t) croissante

$\tilde{\Delta}_p < 0$ *et* $\tilde{\Delta}_k < 0$: les suites (g_{pt}) et (k_t) sont décroissantes

Régime B

On adapte le système dynamique décrit par (16), (17), et (18) en substituant la production par tête y_t par son expression $\hat{y}(k_t, g_{ct})$, fonction croissante et concave en chacun de ses arguments. Étant donnés k_t, g_{ct} et g_{pt}, si l'économie est caractérisée par le régime B, l'existence et l'unicité de l'équilibre intertemporel sont garanties par

$$\begin{cases} k_{t+1} &= \frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\left[Ak_t^{\alpha_k}(\epsilon g_{ct})^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_p}} \\ g_{ct+1} &= (1-\gamma)g_{ct}+\eta_c\left[Ak_t^{\alpha_k}(\epsilon g_{ct})^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_p}} \\ g_{pt+1} &= (1-\gamma)g_{pt}+\eta_p\left[Ak_t^{\alpha_k}(\epsilon g_{ct})^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_p}} \end{cases}$$

où g_{ct} et g_{pt} respectent les conditions suivantes

$$g_{ct} < \underbrace{\frac{\alpha_c}{z_c}\frac{1}{\epsilon}\left[Ak_t^{\alpha_k}(\epsilon g_{ct})^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_p}}}_{\hat{g}_{pst}}$$

$$g_{pt} > \underbrace{\frac{\alpha_p}{z_p}\frac{1}{\epsilon}\left[Ak_t^{\alpha_k}(\epsilon g_{ct})^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_p}}}_{\hat{g}_{pst}}$$

On détermine dans un premier temps la ligne de phases $\hat{\Delta}_{kt}$

$$\begin{aligned} k_{t+1}-k_t=0 &\iff \frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\left[Ak_t^{\alpha_k}(\epsilon g_{ct})^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_p}}-k_t=0 \\ &\iff \frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\left[A\epsilon^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_p}} g_{ct}^{\frac{\alpha_c}{1-\alpha_p}} = k_t^{1-\frac{\alpha_k}{1-\alpha_p}} \\ &\iff g_{ct}^{\frac{\alpha_c}{1-\alpha_p}} = \left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\left[A\epsilon^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_p}}\right]^{-1} k_t^{\frac{\alpha_l+\alpha_c}{1-\alpha_p}} \\ &\iff g_{ct} = \left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\left[A\epsilon^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_p}}\right]^{\frac{\alpha_p-1}{\alpha_c}} k_t^{\frac{\alpha_l+\alpha_c}{\alpha_c}} \end{aligned}$$

La ligne de phases $\hat{\Delta}_k(k_t)$ a les propriétés suivantes

$$\begin{aligned}
&\hat{\Delta}_k^{'}(k_t) > 0 \ et \ \hat{\Delta}_k^{''}(k_t) > 0 \\
&\lim_{k_t \to 0} \hat{\Delta}_k^{'}(k_t) = 0 \ et \lim_{k_t \to +\infty} \hat{\Delta}_k^{'}(k_t) = +\infty \\
&\lim_{k_t \to +\infty} \hat{\Delta}_k(k_t) = +\infty
\end{aligned}$$

On détermine à présent la ligne de phases $\hat{\Delta}_{ct}$

$$\begin{aligned}
g_{ct+1} - g_{ct} = 0 &\iff (1-\gamma)g_{ct} + \eta_c \left[A k_t^{\alpha_k} (\epsilon g_{ct})^{\alpha_c} \left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p} \right]^{\frac{1}{1-\alpha_p}} - g_{ct} = 0 \\
&\iff \eta_c \left[A k_t^{\alpha_k} \epsilon^{\alpha_c} \left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p} \right]^{\frac{1}{1-\alpha_p}} g_{ct}^{\frac{\alpha_c}{1-\alpha_p}} = \gamma g_{ct} \\
&\iff g_{ct}^{\frac{\alpha_k+\alpha_l}{1-\alpha_p}} = \frac{\eta_c}{\gamma} \left[A \epsilon^{\alpha_c} \left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p} \right]^{\frac{1}{1-\alpha_p}} k_t^{\frac{\alpha_k}{1-\alpha_p}} \\
&\iff g_{ct} = \left[\left(\frac{\eta_c}{\gamma}\right)^{1-\alpha_p} A \epsilon^{\alpha_c} \left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p} \right]^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_l}} k_t^{\frac{\alpha_k}{\alpha_k+\alpha_l}}
\end{aligned}$$

La ligne de phases $\hat{\Delta}_c(k_t)$ a les propriétés suivantes

$$\begin{aligned}
&\hat{\Delta}_c^{'}(k_t) > 0 \ et \ \hat{\Delta}_c^{''}(k_t) < 0 \\
&\lim_{k_t \to 0} \hat{\Delta}_c^{'}(k_t) = +\infty \ et \lim_{k_t \to +\infty} \hat{\Delta}_c^{'}(k_t) = 0 \\
&\lim_{k_t \to +\infty} \hat{\Delta}_c(k_t) = +\infty
\end{aligned}$$

Enfin, on détermine la ligne de phases $\hat{\Delta}_{pt}$

$$\begin{aligned}
g_{pt+1} - g_{pt} = 0 &\iff (1-\gamma)g_{pt} + \eta_p \left[A k_t^{\alpha_k} (\epsilon g_{ct})^{\alpha_c} \left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p} \right]^{\frac{1}{1-\alpha_p}} - g_{pt} = 0 \\
&\iff g_{pt} = \frac{\eta_p}{\gamma} \left[A k_t^{\alpha_k} (\epsilon g_{ct})^{\alpha_c} \left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p} \right]^{\frac{1}{1-\alpha_p}} \\
&\iff g_{pt} = \frac{\eta_p}{\gamma} \hat{y}(k_t, g_{ct})
\end{aligned}$$

On ne peut représenter la ligne de phase $\hat{\Delta}_c(k_t, g_{ct})$ dans un plan en deux dimensions. En revanche, $\hat{\Delta}_k$ et $\hat{\Delta}_c$ peuvent être représenter dans un même graphique. S'il existe au moins une intersection, celle-ci forme une situation d'équilibre puisque $k_{t+1} - k_t = 0$ et $g_{ct+1} - g_{ct} = 0$ sont vérifiées. Les propriétés de $\hat{\Delta}_k$ et $\hat{\Delta}_c$ suggère l'existence de deux situations d'équilibre, l'une étant pour $k = 0$.

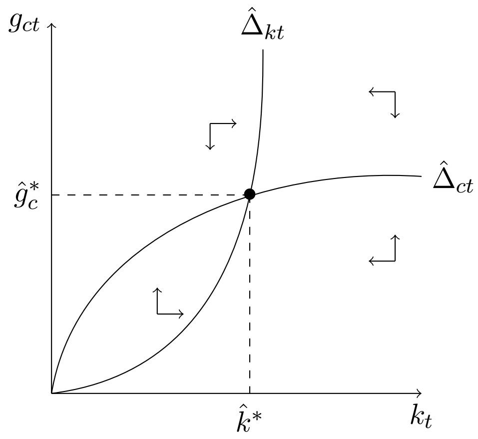

Figure 7: Dynamique k_{t+1} et g_{ct+1} dans le régime B

On résout l'équation $\hat{\Delta}_k = \hat{\Delta}_c$ pour déterminer la solution non-triviale $\hat{k}^*$

$$\begin{aligned}
\hat{\Delta}_k = \hat{\Delta}_c \quad \iff \quad & \left[\tfrac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\left[A\epsilon^{\alpha_c}\left(\tfrac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_p}}\right]^{\frac{\alpha_p-1}{\alpha_c}} k_t^{\frac{\alpha_l+\alpha_c}{\alpha_c}} \\
&= \left[\left(\tfrac{\eta_c}{\gamma}\right)^{1-\alpha_p} A\epsilon^{\alpha_c}\left(\tfrac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_l}} k_t^{\frac{\alpha_k}{\alpha_k+\alpha_l}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iff \quad & k_t^{\frac{\alpha_l+\alpha_c}{\alpha_c}-\frac{\alpha_k}{\alpha_k+\alpha_l}} = \left(\tfrac{\eta_c}{\gamma}\right)^{\frac{1-\alpha_p}{\alpha_k+\alpha_l}}\left[A\epsilon^{\alpha_c}\left(\tfrac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_l}} \\
& \left[\tfrac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\left[A\epsilon^{\alpha_c}\left(\tfrac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_p}}\right]^{\frac{1-\alpha_p}{\alpha_c}}
\end{aligned}$$

L'exposant de k_t donne

$$\begin{aligned}
\frac{(\alpha_l+\alpha_c)(\alpha_k+\alpha_l)-\alpha_k\alpha_c}{\alpha_c(\alpha_k+\alpha_l)} &= \frac{\alpha_l\alpha_k+\alpha_l\alpha_l+\alpha_c\alpha_k+\alpha_c\alpha_l-\alpha_k\alpha_c}{\alpha_c(\alpha_k+\alpha_l)} \\
&= \frac{\alpha_l(\alpha_k+\alpha_l+\alpha_c)}{\alpha_c(\alpha_k+\alpha_l)} \\
&= \frac{\alpha_l(1-\alpha_p)}{\alpha_c(\alpha_k+\alpha_l)}
\end{aligned}$$

Soit

$$k_t^{\frac{\alpha_l(1-\alpha_p)}{\alpha_c(\alpha_k+\alpha_l)}} = \left(\frac{\eta_c}{\gamma}\right)^{\frac{1-\alpha_p}{\alpha_k+\alpha_l}}\left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\frac{1-\alpha_p}{\alpha_c}}\left[A\epsilon^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1-\alpha_p}{\alpha_c(\alpha_k+\alpha_l)}}$$

$$\hat{k}^* = \left[\left(\frac{\eta_c}{\gamma}\right)^{\alpha_c}\left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\alpha_k+\alpha_l} A\epsilon^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_l}}$$

On obtient de cette manière le stock de capital privé à l'équilibre. Par conséquent, on évalue $\hat{\Delta}_{kt}$ ou $\hat{\Delta}_{ct}$ en $\hat{k}^*$ pour obtenir la valeur $\hat{g}_c^*$.

$$\begin{aligned}
\hat{\Delta}_k(\hat{k}^*) \iff \hat{g}_c^* &= \left[\tfrac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\left[A\epsilon^{\alpha_c}\left(\tfrac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_p}}\right]^{\frac{\alpha_p-1}{\alpha_c}} \\
&\left[\left(\tfrac{\eta_c}{\gamma}\right)^{\alpha_c}\left[\tfrac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\alpha_k+\alpha_l} A\epsilon^{\alpha_c}\left(\tfrac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_l}\frac{\alpha_l+\alpha_c}{\alpha_c}} \\
&= \left[\tfrac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\frac{\alpha_p-1}{\alpha_c}+\frac{\alpha_k+\alpha_l}{\alpha_l}\frac{\alpha_l+\alpha_c}{\alpha_c}} \\
&\left[A\epsilon^{\alpha_c}\left(\tfrac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{\alpha_p-1}{\alpha_c(1-\alpha_p)}+\frac{\alpha_l+\alpha_c}{\alpha_l\alpha_c}} \\
&\left(\tfrac{\eta_c}{\gamma}\right)^{\frac{\alpha_c(\alpha_l+\alpha_c)}{\alpha_l\alpha_c}}
\end{aligned}$$

Développement des exposants

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_p-1}{\alpha_c}+\frac{\alpha_k+\alpha_l}{\alpha_l}\frac{\alpha_l+\alpha_c}{\alpha_c} &= \frac{(\alpha_p-1)\alpha_l+(\alpha_k+\alpha_l)(\alpha_l+\alpha_c)}{\alpha_l\alpha_c} \\
&= \frac{\alpha_p\alpha_l-\alpha_l+\alpha_k\alpha_l+\alpha_k\alpha_c+\alpha_l\alpha_l+\alpha_l\alpha_c}{\alpha_l\alpha_c} \\
&= \frac{\alpha_l(\alpha_k+\alpha_l+\alpha_c+\alpha_p-1)+\alpha_k\alpha_c}{\alpha_l\alpha_c} \\
&= \frac{\alpha_k}{\alpha_l} \\
\frac{\alpha_p-1}{\alpha_c(1-\alpha_p)}+\frac{\alpha_l+\alpha_c}{\alpha_l\alpha_c} &= -\frac{1}{\alpha_c}+\frac{\alpha_l+\alpha_c}{\alpha_l\alpha_c} \\
&= \frac{-\alpha_l+\alpha_l+\alpha_c}{\alpha_l\alpha_c} \\
&= \frac{1}{\alpha_l} \\
\frac{\alpha_c(\alpha_l+\alpha_c)}{\alpha_l\alpha_c} &= \frac{\alpha_l+\alpha_c}{\alpha_l}
\end{aligned}$$

Soit

$$\hat{g}_c^* = \left[\left(\frac{\eta_c}{\gamma}\right)^{\alpha_l+\alpha_c}\left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\alpha_k} A\epsilon^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_l}}$$

Les valeurs d'équilibre $\hat{k}^*$ et $\hat{g}_c^*$ sont déterminées. Il reste à trouver $\hat{g}_p^*$

pour connaître l'état stationnaire de ce régime. On évalue alors $\hat{\Delta}_p(\hat{k}^*, \hat{g}_c^*)$

$$
\begin{aligned}
\hat{\Delta}_p(\hat{k}^*, \hat{g}_c^*) \iff \hat{g}_p^* &= \frac{\eta_p}{\gamma}\left[A\epsilon^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_p}}(\hat{k}^*)^{\frac{\alpha_k}{1-\alpha_p}}(\hat{g}_c^*)^{\frac{\alpha_c}{1-\alpha_p}} \\
&= \frac{\eta_p}{\gamma}\left[A\epsilon^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_p}} \\
&\quad \left[\left(\frac{\eta_c}{\gamma}\right)^{\alpha_c}\left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\alpha_k+\alpha_l}A\epsilon^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{\alpha_k}{\alpha_l(1-\alpha_p)}} \\
&\quad \left[\left(\frac{\eta_c}{\gamma}\right)^{\alpha_l+\alpha_c}\left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\alpha_k}A\epsilon^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{\alpha_c}{\alpha_l(1-\alpha_p)}} \\
&= \frac{\eta_p}{\gamma}\left(\frac{\eta_c}{\gamma}\right)^{\frac{\alpha_c\alpha_k}{\alpha_l(1-\alpha_p)}+\frac{\alpha_c(\alpha_l+\alpha_c)}{\alpha_l(1-\alpha_p)}} \\
&\quad \left[A\epsilon^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_p}+\frac{\alpha_k}{\alpha_l(1-\alpha_p)}+\frac{\alpha_c}{\alpha_l(1-\alpha_p)}} \\
&\quad \left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\frac{\alpha_k(\alpha_k+\alpha_l)}{\alpha_l(1-\alpha_p)}+\frac{\alpha_k\alpha_c}{\alpha_l(1-\alpha_p)}}
\end{aligned}
$$

Développement des exposants

$$
\begin{aligned}
\frac{\alpha_c\alpha_k+\alpha_c(\alpha_l+\alpha_c)}{\alpha_l(1-\alpha_p)} &= \frac{\alpha_c(\alpha_k+\alpha_l+\alpha_c)}{\alpha_l(1-\alpha_p)} \\
&= \frac{\alpha_c(1-\alpha_p)}{\alpha_l(1-\alpha_p)} \\
&= \frac{\alpha_c}{\alpha_l}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-\alpha_p}+\frac{\alpha_k+\alpha_c}{\alpha_l(1-\alpha_p)} &= \frac{\alpha_k+\alpha_l+\alpha_c}{\alpha_l(1-\alpha_p)} \\
&= \frac{1-\alpha_p}{\alpha_l(1-\alpha_p)} \\
&= \frac{1}{\alpha_l}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\alpha_k(\alpha_k+\alpha_l)+\alpha_k\alpha_c}{\alpha_l(1-\alpha_p)} &= \frac{\alpha_k(\alpha_k+\alpha_l+\alpha_c)}{\alpha_l(1-\alpha_p)} \\
&= \frac{\alpha_k(1-\alpha_p)}{\alpha_l(1-\alpha_p)} \\
&= \frac{\alpha_k}{\alpha_l}
\end{aligned}
$$

Soit

$$
\hat{g}_p^* = \frac{\eta_p}{\gamma}\left[\left(\frac{\eta_c}{\gamma}\right)^{\alpha_c}\left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\alpha_k}A\epsilon^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_l}}
$$

Régime C

On adapte le système dynamique décrit par (16), (17), et (18) en substituant la production par tête y_t par son expression $\breve{y}(k_t, g_{pt})$, fonction croissante et concave en chacun de ses arguments. Étant donnés k_t, g_{ct} et g_{pt}, si l'économie est caractérisée par le régime C, l'existence et l'unicité de l'équilibre intertemporel sont garanties par

$$\begin{cases} k_{t+1} &= \frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\left[Ak_t^{\alpha_k}(\epsilon g_{pt})^{\alpha_p}\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_c}} \\ g_{ct+1} &= (1-\gamma)g_{ct}+\eta_c\left[Ak_t^{\alpha_k}(\epsilon g_{pt})^{\alpha_p}\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_c}} \\ g_{pt+1} &= (1-\gamma)g_{pt}+\eta_p\left[Ak_t^{\alpha_k}(\epsilon g_{pt})^{\alpha_p}\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_c}} \end{cases}$$

où g_{ct} et g_{pt} respectent les conditions suivantes:

$$g_{ct} > \underbrace{\frac{\alpha_c}{z_c}\frac{1}{\varepsilon}\left[Ak_t^{\alpha_k}(\epsilon g_{pt})^{\alpha_p}\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_c}}}_{\breve{g}_{cst}}$$

$$g_{pt} < \underbrace{\frac{\alpha_p}{z_p}\frac{1}{\varepsilon}\left[Ak_t^{\alpha_k}(\epsilon g_{pt})^{\alpha_p}\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_c}}}_{\breve{g}_{pst}}$$

On détermine dans un premier temps la ligne de phases $\breve{\Delta}_{kt}$

$$\begin{aligned} k_{t+1}-k_t=0 &\iff \frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\left[Ak_t^{\alpha_k}(\epsilon g_{pt})^{\alpha_p}\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_c}}-k_t=0 \\ &\iff \frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\left[A\epsilon^{\alpha_p}\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_c}} g_{pt}^{\frac{\alpha_p}{1-\alpha_c}} = k_t^{1-\frac{\alpha_k}{1-\alpha_c}} \\ &\iff g_{pt}^{\frac{\alpha_p}{1-\alpha_c}} = \left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\left[A\epsilon^{\alpha_p}\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_c}}\right]^{-1} k_t^{\frac{\alpha_l+\alpha_p}{1-\alpha_c}} \\ &\iff g_{pt} = \left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\left[A\epsilon^{\alpha_p}\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_c}}\right]^{\frac{\alpha_c-1}{\alpha_p}} k_t^{\frac{\alpha_l+\alpha_p}{\alpha_p}} \end{aligned}$$

La ligne de phases $\breve{\Delta}_k(k_t)$ a les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} &\breve{\Delta}_k^{'}(k_t) > 0 \ et \ \breve{\Delta}_k^{''}(k_t) > 0 \\ &\lim_{k_t\to 0}\breve{\Delta}_k^{'}(k_t) = 0 \ et \lim_{k_t\to+\infty}\breve{\Delta}_k^{'}(k_t) = +\infty \\ &\lim_{k_t\to+\infty}\breve{\Delta}_k(k_t) = +\infty \end{aligned}$$

On détermine à présent la ligne de phases $\check{\Delta}_{pt}$

$$\begin{aligned}
g_{pt+1} - g_{pt} = 0 &\iff (1-\gamma)g_{pt} + \eta_p \left[A k_t^{\alpha_k} (\epsilon g_{pt})^{\alpha_p} \left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c} \right]^{\frac{1}{1-\alpha_c}} - g_{pt} = 0 \\
&\iff \eta_p \left[A k_t^{\alpha_k} \epsilon^{\alpha_p} \left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c} \right]^{\frac{1}{1-\alpha_c}} g_{pt}^{\frac{\alpha_p}{1-\alpha_c}} = \gamma g_{pt} \\
&\iff g_{pt}^{\frac{\alpha_k+\alpha_l}{1-\alpha_c}} = \frac{\eta_p}{\gamma} \left[A \epsilon^{\alpha_p} \left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c} \right]^{\frac{1}{1-\alpha_c}} k_t^{\frac{\alpha_k}{1-\alpha_c}} \\
&\iff g_{pt} = \left[\left(\frac{\eta_p}{\gamma}\right)^{1-\alpha_c} A \epsilon^{\alpha_p} \left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c} \right]^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_l}} k_t^{\frac{\alpha_k}{\alpha_k+\alpha_l}}
\end{aligned}$$

La ligne de phases $\check{\Delta}_p(k_t)$ a les propriétés suivantes

$$\begin{aligned}
&\check{\Delta}_p'(k_t) > 0 \ et \ \check{\Delta}_p''(k_t) < 0 \\
&\lim_{k_t \to 0} \check{\Delta}_p'(k_t) = +\infty \ et \ \lim_{k_t \to +\infty} \check{\Delta}_p'(k_t) = 0 \\
&\lim_{k_t \to +\infty} \check{\Delta}_p(k_t) = +\infty
\end{aligned}$$

Enfin, on détermine la ligne de phases $\check{\Delta}_{ct}$

$$\begin{aligned}
g_{ct+1} - g_{ct} = 0 &\iff (1-\gamma)g_{ct} + \eta_c \left[A k_t^{\alpha_k} (\epsilon g_{pt})^{\alpha_p} \left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c} \right]^{\frac{1}{1-\alpha_c}} - g_{ct} = 0 \\
&\iff g_{ct} = \frac{\eta_c}{\gamma} \left[A k_t^{\alpha_k} (\epsilon g_{pt})^{\alpha_p} \left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c} \right]^{\frac{1}{1-\alpha_c}} \\
&\iff g_{ct} = \frac{\eta_c}{\gamma} \check{y}(k_t, g_{pt})
\end{aligned}$$

On ne peut représenter la ligne de phase $\check{\Delta}_c(k_t, g_{pt})$ dans un plan en deux dimensions. En revanche, $\check{\Delta}_k$ et $\check{\Delta}_p$ peuvent être représenter dans un même graphique. S'il existe au moins une intersection, celle-ci forme une situation d'équilibre puisque $k_{t+1} - k_t = 0$ et $g_{pt+1} - g_{pt} = 0$ sont vérifiées. Les propriétés de $\check{\Delta}_{kt}$ et $\check{\Delta}_{pt}$ suggèrent l'existence de deux situations d'équilibre, l'une étant pour $k = 0$.

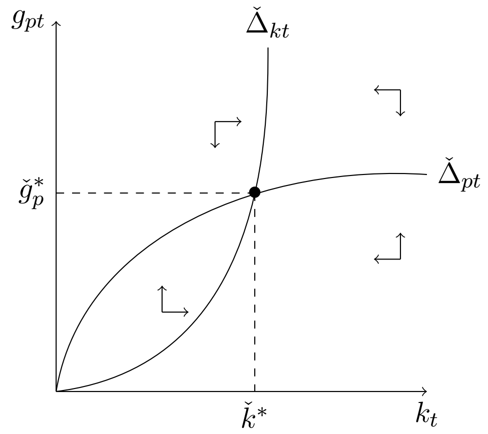

Figure 8: Dynamique k_{t+1} et g_{pt+1} dans le Régime C

On résout l'équation $\check{\Delta}_k = \check{\Delta}_p$ pour déterminer la solution non-triviale $\check{k}^*$

$$\begin{aligned}
\check{\Delta}_k = \check{\Delta}_p \quad \iff \quad & \left[\tfrac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\left[A\epsilon^{\alpha_p}\left(\tfrac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_c}}\right]^{\frac{\alpha_c-1}{\alpha_p}} k_t^{\frac{\alpha_l+\alpha_p}{\alpha_p}} \\
& = \left[\left(\tfrac{\eta_p}{\gamma}\right)^{1-\alpha_c} A\epsilon^{\alpha_p}\left(\tfrac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\right]^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_l}} k_t^{\frac{\alpha_k}{\alpha_k+\alpha_l}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iff \quad & k_t^{\frac{\alpha_l+\alpha_p}{\alpha_p}-\frac{\alpha_k}{\alpha_k+\alpha_l}} = \left(\tfrac{\eta_p}{\gamma}\right)^{\frac{1-\alpha_c}{\alpha_k+\alpha_l}} \left[A\epsilon^{\alpha_p}\left(\tfrac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\right]^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_l}} \\
& \left[\tfrac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\left[A\epsilon^{\alpha_p}\left(\tfrac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_c}}\right]^{\frac{1-\alpha_c}{\alpha_p}}
\end{aligned}$$

L'exposant de k_t donne

$$\begin{aligned}
\frac{(\alpha_l+\alpha_p)(\alpha_k+\alpha_l)-\alpha_k\alpha_p}{\alpha_p(\alpha_k+\alpha_l)} &= \frac{\alpha_l\alpha_k+\alpha_l\alpha_l+\alpha_p\alpha_k+\alpha_p\alpha_l-\alpha_k\alpha_p}{\alpha_p(\alpha_k+\alpha_l)} \\
&= \frac{\alpha_l(\alpha_k+\alpha_l+\alpha_p)}{\alpha_p(\alpha_k+\alpha_l)} \\
&= \frac{\alpha_l(1-\alpha_c)}{\alpha_p(\alpha_k+\alpha_l)}
\end{aligned}$$

Soit

$$k_t^{\frac{\alpha_l(1-\alpha_c)}{\alpha_p(\alpha_k+\alpha_l)}} = \left(\frac{\eta_p}{\gamma}\right)^{\frac{1-\alpha_c}{\alpha_k+\alpha_l}} \left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\frac{1-\alpha_c}{\alpha_p}} \left[A\epsilon^{\alpha_p}\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\right]^{\frac{1-\alpha_c}{\alpha_p(\alpha_k+\alpha_l)}}$$

$$\check{k}^* = \left[\left(\frac{\eta_p}{\gamma}\right)^{\alpha_p}\left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\alpha_k+\alpha_l} A\epsilon^{\alpha_p}\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\right]^{\frac{1}{\alpha_l}}$$

On obtient de cette manière le stock de capital privé à l'équilibre. Par conséquent, on évalue $\check{\Delta}_{kt}$ ou $\check{\Delta}_{pt}$ en $\check{k}^*$ pour obtenir la valeur $\check{g}_p^*$.

$$\begin{aligned}
\check{\Delta}_p(\check{k}^*) \iff \check{g}_p^* &= \left(\frac{\eta_p}{\gamma}\right)^{\frac{1-\alpha_c}{\alpha_k+\alpha_l}} \left[A\epsilon^{\alpha_p}\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\right]^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_l}} (\check{k}^*)^{\frac{\alpha_k}{\alpha_k+\alpha_l}} \\
&= \left(\frac{\eta_p}{\gamma}\right)^{\frac{1-\alpha_c}{\alpha_k+\alpha_l}} \left[A\epsilon^{\alpha_p}\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\right]^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_l}} \\
&\quad \left[\left(\frac{\eta_p}{\gamma}\right)^{\alpha_p}\left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\alpha_k+\alpha_l} A\epsilon^{\alpha_p}\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\right]^{\frac{1}{\alpha_l}\frac{\alpha_k}{\alpha_k+\alpha_l}} \\
&= \left(\frac{\eta_p}{\gamma}\right)^{\frac{1-\alpha_c}{\alpha_k+\alpha_l}+\frac{\alpha_k\alpha_p}{\alpha_l(\alpha_k+\alpha_l)}} \left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\frac{\alpha_k(\alpha_k+\alpha_l)}{\alpha_l(\alpha_k+\alpha_l)}} \\
&\quad \left[A\epsilon^{\alpha_p}\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\right]^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_l}+\frac{\alpha_k}{\alpha_l(\alpha_k+\alpha_l)}}
\end{aligned}$$

Développement des exposants

$$\begin{aligned}
\frac{1-\alpha_c}{\alpha_k+\alpha_l} + \frac{\alpha_k\alpha_p}{\alpha_l(\alpha_k+\alpha_l)} &= \frac{\alpha_l(1-\alpha_c)+\alpha_k\alpha_p}{\alpha_l(\alpha_k+\alpha_l)} \\
&= \frac{\alpha_l(\alpha_k+\alpha_l+\alpha_p)+\alpha_k\alpha_p}{\alpha_l(\alpha_k+\alpha_l)} \\
&= \frac{\alpha_l(\alpha_k+\alpha_l)+\alpha_p(\alpha_k+\alpha_l)}{\alpha_l(\alpha_k+\alpha_l)} \\
&= \frac{\alpha_l+\alpha_p}{\alpha_l}
\end{aligned}$$

Soit

$$\check{g}_p^* = \left[\left(\frac{\eta_p}{\gamma}\right)^{\alpha_l+\alpha_p}\left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\alpha_k} A\epsilon^{\alpha_p}\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\right]^{\frac{1}{\alpha_l}}$$

Les valeurs d'équilibre $\check{k}^*$ et $\check{g}_p^*$ sont déterminées. Il reste à trouver $\check{g}_c^*$

pour connaître l'état stationnaire de ce régime. On évalue alors $\check{\Delta}_c(\check{k}^*, \check{g}_p^*)$

$$\begin{aligned}
\check{\Delta}_c(\check{k}^*, \check{g}_p^*) \iff \check{g}_c^* &= \tfrac{\eta_c}{\gamma}\left[A\epsilon^{\alpha_p}\left(\tfrac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_c}} (\check{k}^*)^{\frac{\alpha_k}{1-\alpha_c}} (\check{g}_p^*)^{\frac{\alpha_p}{1-\alpha_c}} \\
&= \tfrac{\eta_c}{\gamma}\left[A\epsilon^{\alpha_c}\left(\tfrac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_p}} \\
&\quad \left[\left(\tfrac{\eta_p}{\gamma}\right)^{\alpha_p}\left[\tfrac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\alpha_k+\alpha_l} A\epsilon^{\alpha_p}\left(\tfrac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\right]^{\frac{\alpha_k}{\alpha_l(1-\alpha_c)}} \\
&\quad \left[\left(\tfrac{\eta_p}{\gamma}\right)^{\alpha_l+\alpha_p}\left[\tfrac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\alpha_k} A\epsilon^{\alpha_p}\left(\tfrac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\right]^{\frac{\alpha_p}{\alpha_l(1-\alpha_c)}} \\
&= \tfrac{\eta_c}{\gamma}\left(\tfrac{\eta_p}{\gamma}\right)^{\frac{\alpha_k\alpha_p}{\alpha_l(1-\alpha_p)}+\frac{\alpha_p(\alpha_l+\alpha_p)}{\alpha_l(1-\alpha_c)}} \\
&\quad \left[A\epsilon^{\alpha_p}\left(\tfrac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_c}+\frac{\alpha_k}{\alpha_l(1-\alpha_c)}+\frac{\alpha_p}{\alpha_l(1-\alpha_c)}} \\
&\quad \left[\tfrac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\frac{\alpha_k(\alpha_k+\alpha_l)}{\alpha_l(1-\alpha_c)}+\frac{\alpha_k\alpha_p}{\alpha_l(1-\alpha_c)}}
\end{aligned}$$

Développement des exposants

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_k\alpha_p+\alpha_p(\alpha_l+\alpha_p)}{\alpha_l(1-\alpha_p)} &= \frac{\alpha_p(\alpha_k+\alpha_l+\alpha_p)}{\alpha_l(1-\alpha_c)} \\
&= \frac{\alpha_p(1-\alpha_c)}{\alpha_l(1-\alpha_c)} \\
&= \frac{\alpha_p}{\alpha_l}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\alpha_c}+\frac{\alpha_k+\alpha_p}{\alpha_l(1-\alpha_c)} &= \frac{\alpha_k+\alpha_l+\alpha_p}{\alpha_l(1-\alpha_c)} \\
&= \frac{1-\alpha_c}{\alpha_l(1-\alpha_c)} \\
&= \frac{1}{\alpha_l}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_k(\alpha_k+\alpha_l)+\alpha_k\alpha_p}{\alpha_l(1-\alpha_c)} &= \frac{\alpha_k(\alpha_k+\alpha_l+\alpha_p)}{\alpha_l(1-\alpha_c)} \\
&= \frac{\alpha_k(1-\alpha_c)}{\alpha_l(1-\alpha_c)} \\
&= \frac{\alpha_k}{\alpha_l}
\end{aligned}$$

Soit

$$\check{g}_c^* = \frac{\eta_c}{\gamma}\left[\left(\frac{\eta_p}{\gamma}\right)^{\alpha_p}\left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\alpha_k} A\epsilon^{\alpha_p}\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\right]^{\frac{1}{\alpha_l}}$$

Régime D

On adapte le système dynamique décrit par (**??**), (**??**), et (**??**) en substituant la production par tête y_t par son expression $\mathring{y}(k_t, g_{ct}, g_{pt})$, fonction croissante et concave en chacun de ses arguments. Étant donnés k_t, g_{ct} et g_{pt}, si l'économie est caractérisée par le régime D, l'existence et l'unicité de l'équilibre inter-temporel sont garanties par

$$\begin{cases} k_{t+1} &= \frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\left[Ak_t^{\alpha_k}(\varepsilon g_{ct})^{\alpha_c}(\varepsilon g_{pt})^{\alpha_p}\right] \\ g_{ct+1} &= (1-\gamma)g_{ct} + \eta_c\left[Ak_t^{\alpha_k}(\varepsilon g_{ct})^{\alpha_c}(\varepsilon g_{pt})^{\alpha_p}\right] \\ g_{pt+1} &= (1-\gamma)g_{pt} + \eta_p\left[Ak_t^{\alpha_k}(\varepsilon g_{ct})^{\alpha_c}(\varepsilon g_{pt})^{\alpha_p}\right] \end{cases}$$

où g_{ct} et g_{pt} respectent les conditions suivantes:

$$g_{ct} < \underbrace{\frac{\alpha_c}{z_c}\frac{1}{\varepsilon}\left[Ak_t^{\alpha_k}(\varepsilon g_{ct})^{\alpha_c}(\varepsilon g_{pt})^{\alpha_p}\right]}_{\mathring{g}_{cst}}$$

$$g_{pt} < \underbrace{\frac{\alpha_p}{z_p}\frac{1}{\varepsilon}\left[Ak_t^{\alpha_k}(\varepsilon g_{ct})^{\alpha_c}(\varepsilon g_{pt})^{\alpha_p}\right]}_{\mathring{g}_{pst}}$$

On détermine dans un premier temps la ligne de phases $\mathring{\Delta}_{kt}$

$$\begin{aligned} k_{t+1}-k_t = 0 \iff & \frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\left[Ak_t^{\alpha_k}(\varepsilon g_{ct})^{\alpha_c}(\varepsilon g_{pt})^{\alpha_p}\right] - k_t = 0 \\ \iff & k_t^{1-\alpha_k} = \frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)A(\varepsilon g_{ct})^{\alpha_c}(\varepsilon g_{pt})^{\alpha_p} \\ \iff & k_t = \left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)A(\varepsilon g_{ct})^{\alpha_c}(\varepsilon g_{pt})^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_k}} \end{aligned} \tag{108}$$

On détermine à présent la ligne de phases $\mathring{\Delta}_{ct}$

$$\begin{aligned} g_{ct+1}-g_{ct} = 0 \iff & (1-\gamma)g_{ct} + \eta_c\left[Ak_t^{\alpha_k}(\varepsilon g_{ct})^{\alpha_c}(\varepsilon g_{pt})^{\alpha_p}\right] - g_{ct} = 0 \\ \iff & g_{ct}^{1-\alpha_c} = \frac{\eta_c}{\gamma}Ak_t^{\alpha_k}\varepsilon^{\alpha_c}(\varepsilon g_{pt})^{\alpha_p} \\ \iff & g_{ct} = \left[\frac{\eta_c}{\gamma}Ak_t^{\alpha_k}\varepsilon^{\alpha_c}(\varepsilon g_{pt})^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_c}} \end{aligned} \tag{109}$$

Enfin, on détermine la ligne de phases $\mathring{\Delta}_{pt}$

$$\begin{aligned} g_{pt+1} - g_{pt} = 0 &\iff (1-\gamma)g_{pt} + \eta_p \left[A k_t^{\alpha_k} (\varepsilon g_{ct})^{\alpha_c} (\varepsilon g_{pt})^{\alpha_p}\right] - g_{pt} = 0 \\ &\iff g_{pt}^{1-\alpha_p} = \frac{\eta_p}{\gamma} A k_t^{\alpha_k} (\varepsilon g_{ct})^{\alpha_c} \varepsilon^{\alpha_p} \\ &\iff g_{pt} = \left[\frac{\eta_p}{\gamma} A k_t^{\alpha_k} (\varepsilon g_{ct})^{\alpha_c} \varepsilon^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_p}} \end{aligned} \tag{110}$$

En substituant g_{pt} dans (109) par (110) on obtient

$$\begin{aligned} g_{ct} &= \left[\frac{\eta_c}{\gamma} A k_t^{\alpha_k} \varepsilon^{\alpha_c} \varepsilon^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_c}} \left[\frac{\eta_p}{\gamma} A k_t^{\alpha_k} (\varepsilon g_{ct})^{\alpha_c} \varepsilon^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_p}\frac{\alpha_p}{1-\alpha_c}} \\ g_{ct}^{1-\frac{\alpha_c\alpha_p}{(1-\alpha_p)(1-\alpha_c)}} &= \eta_c^{\frac{1}{1-\alpha_c}} \eta_p^{\frac{1}{1-\alpha_p}\frac{\alpha_p}{1-\alpha_c}} \left[\frac{1}{\gamma} A k_t^{\alpha_k} \varepsilon^{\alpha_c+\alpha_p}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_c}+\frac{\alpha_p}{(1-\alpha_p)(1-\alpha_c)}} \\ g_{ct}^{\frac{1-\alpha_c-\alpha_p}{(1-\alpha_p)(1-\alpha_c)}} &= \eta_c^{\frac{1}{1-\alpha_c}} \eta_p^{\frac{\alpha_p}{(1-\alpha_p)(1-\alpha_c)}} \left[\frac{1}{\gamma} A k_t^{\alpha_k} \varepsilon^{\alpha_c+\alpha_p}\right]^{\frac{(1-\alpha_p)+\alpha_p}{(1-\alpha_p)(1-\alpha_c)}} \\ g_{ct} &= \left[\eta_c^{\frac{1}{1-\alpha_c}} \eta_p^{\frac{\alpha_p}{(1-\alpha_p)(1-\alpha_c)}} \left[\frac{1}{\gamma} A k_t^{\alpha_k} \varepsilon^{\alpha_c+\alpha_p}\right]^{\frac{1}{(1-\alpha_p)(1-\alpha_c)}}\right]^{\frac{(1-\alpha_p)(1-\alpha_c)}{\alpha_k+\alpha_l}} \end{aligned}$$

soit

$$g_{ct} = \left[\eta_c^{1-\alpha_p} \eta_p^{\alpha_p} \frac{1}{\gamma} A k_t^{\alpha_k} \varepsilon^{\alpha_c+\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_l}} \tag{111}$$

De la même manière, (109) dans (110) donne

$$\begin{aligned} g_{pt} &= \left[\frac{\eta_p}{\gamma} A k_t^{\alpha_k} \varepsilon^{\alpha_c+\alpha_p}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_p}} \left[\frac{\eta_c}{\gamma} A k_t^{\alpha_k} \varepsilon^{\alpha_c} (\varepsilon g_{pt})^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_c}\frac{\alpha_c}{1-\alpha_p}} \\ g_{pt}^{1-\frac{\alpha_p\alpha_c}{(1-\alpha_c)(1-\alpha_p)}} &= \eta_p^{\frac{1}{1-\alpha_p}} \eta_c^{\frac{\alpha_c}{(1-\alpha_c)(1-\alpha_p)}} \left[\frac{1}{\gamma} A k_t^{\alpha_k} \varepsilon^{\alpha_c+\alpha_p}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_p}+\frac{\alpha_c}{(1-\alpha_c)(1-\alpha_p)}} \\ g_{pt}^{\frac{1-\alpha_p-\alpha_c}{(1-\alpha_c)(1-\alpha_p)}} &= \eta_p^{\frac{1}{1-\alpha_p}} \eta_c^{\frac{\alpha_c}{(1-\alpha_c)(1-\alpha_p)}} \left[\frac{1}{\gamma} A k_t^{\alpha_k} \varepsilon^{\alpha_c+\alpha_p}\right]^{\frac{(1-\alpha_c)+\alpha_c}{(1-\alpha_c)(1-\alpha_p)}} \\ g_{pt} &= \left[\eta_p^{\frac{1}{1-\alpha_p}} \eta_c^{\frac{\alpha_c}{(1-\alpha_c)(1-\alpha_p)}} \left[\frac{1}{\gamma} A k_t^{\alpha_k} \varepsilon^{\alpha_c+\alpha_p}\right]^{\frac{1}{(1-\alpha_c)(1-\alpha_p)}}\right]^{\frac{(1-\alpha_c)(1-\alpha_p)}{\alpha_k+\alpha_l}} \end{aligned}$$

soit

$$g_{pt} = \left[\eta_p^{1-\alpha_c} \eta_c^{\alpha_c} \frac{1}{\gamma} A k_t^{\alpha_k} \varepsilon^{\alpha_c+\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_l}} \tag{112}$$

Les valeurs stationnaires $(\mathring{k}^*, \mathring{g}_c^*, \mathring{g}_p^*)$ sont déterminées en remplaçant g_{ct} et g_{pt} par (111) et (112) dans (108) pour obtenir $\mathring{k}^*$ puis en substituant k_t

par sa valeur stationnaire dans (111) et (112) pour obtenir $\mathring{g}_c^*$ et $\mathring{g}_p^*$. Soit

$$\begin{cases} \mathring{k}^* &= \left[\eta_c^{\alpha_c}\eta_p^{\alpha_p}\left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)A\varepsilon^{\alpha_c+\alpha_p}\right]^{(\alpha_k+\alpha_l)(1-\alpha_k)}\right. \\ & \left.\left(\frac{1}{\gamma}A\varepsilon^{\alpha_c+\alpha_p}\right)^{\alpha_c+\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_l}} \\ \mathring{g}_c^* &= \left[\eta_c^{1-\alpha_p}\eta_p^{\alpha_p}\frac{1}{\gamma}A\varepsilon^{\alpha_c+\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_l}}(\mathring{k}^*)^{\frac{\alpha_k}{\alpha_k+\alpha_l}} \\ \mathring{g}_p^* &= \left[\eta_c^{\alpha_c}\eta_p^{1-\alpha_c}\frac{1}{\gamma}A\varepsilon^{\alpha_c+\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_l}}(\mathring{k}^*)^{\frac{\alpha_k}{\alpha_k+\alpha_l}} \end{cases}$$

D Régime d'équilibre

Depuis l'optimum de la firme, le régime d'équilibre de l'économie est déterminé par le niveau des stocks d'infrastructures g_{ct} et g_{pt} qui sont comparés aux valeurs seuils g_{cst} et g_{pst}. On évalue ici les conditions d'appartenance de l'état stationnaire à son régime d'équilibre.

Régime A

Dans ce régime aucune des infrastructures n'est saturée. Par conséquent, l'état stationnaire appartient au régime A si et seulement si

$$\tilde{g}_c^* > \tilde{g}_{cs}^*$$
$$\tilde{g}_p^* > \tilde{g}_{ps}^*$$

On évalue dans un premier temps les valeurs $\tilde{g}_{cs}^*$ et $\tilde{g}_{ps}^*$

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{cs}^* &= \frac{\alpha_c}{z_c}\frac{1}{\epsilon}\left[A\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_l}}(k^*)^{\frac{\alpha_k}{\alpha_k+\alpha_l}} \\ &= \frac{\alpha_c}{z_c}\frac{1}{\epsilon}\left[A\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_l}}\left[\left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\alpha_k+\alpha_l}A\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_l}\frac{\alpha_k}{\alpha_k+\alpha_l}} \end{aligned}$$

Soit

$$\tilde{g}_{cs}^* = \frac{\alpha_c}{z_c}\frac{1}{\varepsilon}\left[\left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\alpha_k}A\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_l}}$$

De la même manière

$$\tilde{g}_{ps}^* = \frac{\alpha_p}{z_p}\frac{1}{\epsilon}\left[A\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_l}}(k^*)^{\frac{\alpha_k}{\alpha_k+\alpha_l}}$$

Soit

$$\tilde{g}_{ps}^* = \frac{\alpha_p}{z_p}\frac{1}{\varepsilon}\left[\left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\alpha_k}A\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_l}}$$

Les conditions deviennent

$$\tilde{g}_c^* > \tilde{g}_{cs}^*$$

$$\frac{\eta_c}{\gamma}\left[\left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\alpha_k} A\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_l}}$$
$$>$$
$$\frac{\alpha_c}{z_c}\frac{1}{\varepsilon}\left[\left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\alpha_k} A\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_l}}$$

$$z_c > \frac{\alpha_c}{\eta_c}\frac{\gamma}{\varepsilon}$$

Et

$$\tilde{g}_p^* > \tilde{g}_{ps}^*$$

$$\frac{\eta_p}{\gamma}\left[\left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\alpha_k} A\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_l}}$$
$$>$$
$$\frac{\alpha_p}{z_p}\frac{1}{\varepsilon}\left[\left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\alpha_k} A\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_l}}$$

$$z_p > \frac{\alpha_p}{\eta_p}\frac{\gamma}{\varepsilon}$$

Régime B

Dans ce régime, seule l'infrastructure g_{ct} est saturée. Par conséquent, l'état stationnaire appartient au régime B si et seulement si

$$\hat{g}_c^* < \hat{g}_{cs}^*$$
$$\hat{g}_p^* > \hat{g}_{ps}^*$$

On reprend dans un premier temps la condition sur g_{ct}

$$g_{ct} < \frac{\alpha_c}{z_c}\frac{1}{\varepsilon}\left[Ak_t^{\alpha_k}(\varepsilon g_{ct})^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_p}}$$

$$g_{ct}^{1-\frac{\alpha_c}{1-\alpha_p}} < \frac{\alpha_c}{z_c}\frac{1}{\varepsilon}\left[Ak_t^{\alpha_k}\varepsilon^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_p}}$$

$$g_{ct} < \underbrace{\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1-\alpha_p}{\alpha_k+\alpha_l}}\left[Ak_t^{\alpha_k}\varepsilon^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_l}}}_{\hat{g}_{cst}}$$

On évalue alors $\hat{g}_{cs}^*$

$$\hat{g}_{cs}^* = \left(\frac{\alpha_c}{z_c}\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1-\alpha_p}{\alpha_k+\alpha_l}} \left[A\varepsilon^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_l}} \left(\hat{k}^*\right)^{\frac{\alpha_k}{\alpha_k+\alpha_l}}$$

$$\hat{g}_{cs}^* = \left(\frac{\alpha_c}{z_c}\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1-\alpha_p}{\alpha_k+\alpha_l}} \left[A\varepsilon^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_l}}$$
$$\left[\left(\frac{\eta_c}{\gamma}\right)^{\alpha_c}\left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\alpha_k+\alpha_l} A\varepsilon^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_l}\frac{\alpha_k}{\alpha_k+\alpha_l}}$$

Soit

$$\hat{g}_{cs}^* = \left[\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1-\alpha_p}\left(\frac{\eta_c}{\gamma}\right)^{\frac{\alpha_c\alpha_k}{\alpha_l}}\right]^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_l}} \left[\left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\alpha_k} A\varepsilon^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_l}}$$

Évaluée à l'état stationnaire la condition devient

$$\hat{g}_c^* < \hat{g}_{cs}^*$$

$$\left[\left(\frac{\eta_c}{\gamma}\right)^{\alpha_l+\alpha_c}\left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\alpha_k} A\epsilon^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_l}}$$
$$<$$
$$\left[\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1-\alpha_p}\left(\frac{\eta_c}{\gamma}\right)^{\frac{\alpha_c\alpha_k}{\alpha_l}}\right]^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_l}} \left[\left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\alpha_k} A\varepsilon^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_l}}$$

Ce qui revient à

$$\left(\frac{\eta_c}{\gamma}\right)^{\frac{\alpha_l+\alpha_c}{\alpha_l}} < \left(\frac{\alpha_c}{z_c}\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1-\alpha_p}{\alpha_k+\alpha_l}}\left(\frac{\eta_c}{\gamma}\right)^{\frac{\alpha_c\alpha_k}{\alpha_l(\alpha_k+\alpha_l)}}$$
$$\left(\frac{\eta_c}{\gamma}\right)^{\frac{\alpha_l+\alpha_c}{\alpha_l}-\frac{\alpha_c\alpha_k}{\alpha_l(\alpha_k+\alpha_l)}} < \left(\frac{\alpha_c}{z_c}\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1-\alpha_p}{\alpha_k+\alpha_l}}$$

où

$$\begin{aligned}\frac{\alpha_l+\alpha_c}{\alpha_l}-\frac{\alpha_c\alpha_k}{\alpha_l(\alpha_k+\alpha_l)} &= \frac{(\alpha_k+\alpha_l)(\alpha_l+\alpha_c)-\alpha_c\alpha_k}{\alpha_l(\alpha_k+\alpha_l)}\\ &= \frac{\alpha_k\alpha_l+\alpha_l\alpha_l+\alpha_l\alpha_c}{\alpha_l(\alpha_k+\alpha_l)}\\ &= \frac{\alpha_l(\alpha_k+\alpha_l+\alpha_c)}{\alpha_l(\alpha_k+\alpha_l)}\\ &= \frac{1-\alpha_p}{\alpha_k+\alpha_l}\end{aligned}$$

On obtient alors

$$z_c < \frac{\alpha_c}{z_c}\frac{\gamma}{\varepsilon}$$

On passe dans un second temps à la condition sur g_{pt}

$$g_{pt} > \underbrace{\frac{\alpha_p}{z_p}\frac{1}{\varepsilon}\left[Ak_t^{\alpha_k}(\epsilon g_{ct})^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_p}}}_{\hat{g}_{pst}}$$

On évalue alors $\hat{g}_{ps}^*$

$$\begin{aligned}
\hat{g}_{ps}^* =& \frac{\alpha_p}{z_p}\frac{1}{\varepsilon}\left[A\varepsilon^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_p}}(\hat{k}^*)^{\frac{\alpha_k}{1-\alpha_p}}(\hat{g}_c^*)^{\frac{\alpha_c}{1-\alpha_p}}\\
=& \frac{\alpha_p}{z_p}\frac{1}{\varepsilon}\left[A\varepsilon^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_p}}\left[\left(\frac{\eta_c}{\gamma}\right)^{\alpha_c}\left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\alpha_k+\alpha_l}A\epsilon^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_l}\frac{\alpha_k}{1-\alpha_p}}\\
&\left[\left(\frac{\eta_c}{\gamma}\right)^{\alpha_l+\alpha_c}\left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\alpha_k}A\epsilon^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_l}\frac{\alpha_c}{1-\alpha_p}}
\end{aligned}$$

Regroupons les termes

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\eta_c}{\gamma}\right)^{\frac{\alpha_c\alpha_k}{\alpha_l(1-\alpha_p)}+\frac{\alpha_c(\alpha_l+\alpha_c)}{\alpha_l(1-\alpha_p)}} &\iff \left(\frac{\eta_c}{\gamma}\right)^{\frac{\alpha_c}{\alpha_l}}\\
\left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\frac{\alpha_k(\alpha_k+\alpha_l)}{\alpha_l(1-\alpha_p)}+\frac{\alpha_k\alpha_c}{\alpha_l(1-\alpha_p)}} &\iff \left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\frac{\alpha_k}{\alpha_l}}\\
\left[A\epsilon^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_p}+\frac{\alpha_k}{\alpha_l(1-\alpha_p)}+\frac{\alpha_c}{\alpha_l(1-\alpha_p)}} &\iff \left[A\epsilon^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_l}}
\end{aligned}$$

Soit

$$\hat{g}_{ps}^* = \frac{\alpha_p}{z_p}\frac{1}{\varepsilon}\left[\left(\frac{\eta_c}{\gamma}\right)^{\alpha_c}\left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\alpha_k}A\epsilon^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_l}}$$

Évaluée à l'état stationnaire la condition devient

$$\hat{g}_p^* > \hat{g}_{ps}^*$$

$$\frac{\eta_p}{\gamma}\left[\left(\frac{\eta_c}{\gamma}\right)^{\alpha_c}\left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\alpha_k}A\epsilon^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_l}}$$
$$>$$
$$\frac{\alpha_p}{z_p}\frac{1}{\varepsilon}\left[\left(\frac{\eta_c}{\gamma}\right)^{\alpha_c}\left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\alpha_k}A\epsilon^{\alpha_c}\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\right)^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_l}}$$

$$z_p > \frac{\alpha_p}{z_p}\frac{\gamma}{\varepsilon}$$

Régime C

Dans ce régime, seule l'infrastructure g_{pt} est saturée. Par conséquent, l'état stationnaire appartient au régime C si et seulement si

$$\begin{aligned}\breve{g}_c^* &> \breve{g}_{cs}^* \\ \breve{g}_p^* &< \breve{g}_{ps}^*\end{aligned}$$

On reprend dans un premier temps la condition sur g_{pt}

$$\begin{aligned}
g_{pt} &< \frac{\alpha_p}{z_p}\frac{1}{\varepsilon}\left[Ak_t^{\alpha_k}\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}(\varepsilon g_{pt})^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_c}} \\
g_{pt}^{1-\frac{\alpha_p}{1-\alpha_c}} &< \frac{\alpha_p}{z_p}\frac{1}{\varepsilon}\left[Ak_t^{\alpha_k}\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\varepsilon^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_c}} \\
g_{pt} &< \underbrace{\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1-\alpha_c}{\alpha_k+\alpha_l}}\left[Ak_t^{\alpha_k}\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\varepsilon^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_l}}}_{\breve{g}_{pst}}
\end{aligned}$$

On évalue alors $\breve{g}_{ps}^*$

$$\begin{aligned}
\breve{g}_{ps}^* &= \left(\frac{\alpha_p}{z_p}\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1-\alpha_c}{\alpha_k+\alpha_l}}\left[A\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\varepsilon^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_l}}\left(\breve{k}^*\right)^{\frac{\alpha_k}{\alpha_k+\alpha_l}} \\
\breve{g}_{ps}^* &= \left(\frac{\alpha_p}{z_p}\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1-\alpha_c}{\alpha_k+\alpha_l}}\left[A\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\varepsilon^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_l}} \\
&\quad \left[\left(\frac{\eta_p}{\gamma}\right)^{\alpha_p}\left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\alpha_k+\alpha_l}A\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\varepsilon^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_l}\frac{\alpha_k}{\alpha_k+\alpha_l}}
\end{aligned}$$

Soit

$$\breve{g}_{ps}^* = \left[\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1-\alpha_c}\left(\frac{\eta_p}{\gamma}\right)^{\frac{\alpha_p\alpha_k}{\alpha_l}}\right]^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_l}}\left[\left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\alpha_k}A\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\varepsilon^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_l}}$$

Évaluée à l'état stationnaire la condition devient

$$\breve{g}_p^* < \breve{g}_{ps}^*$$

$$\begin{gathered}
\left[\left(\frac{\eta_p}{\gamma}\right)^{\alpha_l+\alpha_p}\left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\alpha_k}A\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\varepsilon^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_l}} \\
< \\
\left[\left(\frac{\alpha_p}{z_p}\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1-\alpha_c}\left(\frac{\eta_p}{\gamma}\right)^{\frac{\alpha_p\alpha_k}{\alpha_l}}\right]^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_l}}\left[\left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\alpha_k}A\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\varepsilon^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_l}}
\end{gathered}$$

Ce qui revient à

$$\left(\frac{\eta_p}{\gamma}\right)^{\frac{\alpha_l+\alpha_p}{\alpha_l}} < \left(\frac{\alpha_p}{z_p}\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1-\alpha_c}{\alpha_k+\alpha_l}} \left(\frac{\eta_p}{\gamma}\right)^{\frac{\alpha_p\alpha_k}{\alpha_l(\alpha_k+\alpha_l)}}$$
$$\left(\frac{\eta_p}{\gamma}\right)^{\frac{\alpha_l+\alpha_p}{\alpha_l}-\frac{\alpha_p\alpha_k}{\alpha_l(\alpha_k+\alpha_l)}} < \left(\frac{\alpha_p}{z_p}\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1-\alpha_c}{\alpha_k+\alpha_l}}$$

où

$$\begin{aligned}\frac{\alpha_l+\alpha_p}{\alpha_l} - \frac{\alpha_p\alpha_k}{\alpha_l(\alpha_k+\alpha_l)} =& \frac{(\alpha_k+\alpha_l)(\alpha_l+\alpha_p)-\alpha_p\alpha_k}{\alpha_l(\alpha_k+\alpha_l)}\\ =& \frac{\alpha_k\alpha_l+\alpha_l\alpha_l+\alpha_l\alpha_p}{\alpha_l(\alpha_k+\alpha_l)}\\ =& \frac{\alpha_l(\alpha_k+\alpha_l+\alpha_p)}{\alpha_l(\alpha_k+\alpha_l)}\\ =& \frac{1-\alpha_c}{\alpha_k+\alpha_l}\end{aligned}$$

On obtient alors

$$z_p < \frac{\alpha_p}{z_p}\frac{\gamma}{\varepsilon}$$

On passe dans un second temps à la condition sur g_{ct}

$$g_{ct} > \underbrace{\frac{\alpha_c}{z_c}\frac{1}{\varepsilon}\left[Ak_t^{\alpha_k}\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}(\varepsilon g_{pt})^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_c}}}_{\breve{g}_{cst}}$$

On évalue alors $\breve{g}_{cs}^*$

$$\begin{aligned}\breve{g}_{cs}^* =& \frac{\alpha_c}{z_c}\frac{1}{\varepsilon}\left[A\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\varepsilon^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_c}}(\breve{k}^*)^{\frac{\alpha_k}{1-\alpha_c}}(\breve{g}_p^*)^{\frac{\alpha_p}{1-\alpha_c}}\\ =& \frac{\alpha_c}{z_c}\frac{1}{\varepsilon}\left[A\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\varepsilon^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_c}}\left[\left(\frac{\eta_p}{\gamma}\right)^{\alpha_p}\left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\alpha_k+\alpha_l}A\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\varepsilon^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_l}\frac{\alpha_k}{1-\alpha_c}}\\ & \left[\left(\frac{\eta_p}{\gamma}\right)^{\alpha_l+\alpha_p}\left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\alpha_k}A\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\varepsilon^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_l}\frac{\alpha_p}{1-\alpha_c}}\end{aligned}$$

Regroupons les termes

$$\begin{aligned}\left(\frac{\eta_p}{\gamma}\right)^{\frac{\alpha_p\alpha_k}{\alpha_l(1-\alpha_c)}+\frac{\alpha_p(\alpha_l+\alpha_p)}{\alpha_l(1-\alpha_c)}} &\iff \left(\frac{\eta_p}{\gamma}\right)^{\frac{\alpha_p}{\alpha_l}}\\ \left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\frac{\alpha_k(\alpha_k+\alpha_l)}{\alpha_l(1-\alpha_c)}+\frac{\alpha_k\alpha_p}{\alpha_l(1-\alpha_c)}} &\iff \left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\frac{\alpha_k}{\alpha_l}}\\ \left[A\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\varepsilon^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_c}+\frac{\alpha_k}{\alpha_l(1-\alpha_c)}+\frac{\alpha_p}{\alpha_l(1-\alpha_c)}} &\iff \left[A\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\varepsilon^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_l}}\end{aligned}$$

Soit

$$\check{g}^*_{cs} = \frac{\alpha_c}{z_c}\frac{1}{\varepsilon}\left[\left(\frac{\eta_p}{\gamma}\right)^{\alpha_p}\left[\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\alpha_k} A\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\varepsilon^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_l}}$$

Évaluée à l'état stationnaire la condition devient

$$\check{g}^*_c > \check{g}^*_{cs}$$

$$\frac{\eta_c}{\gamma}\left[\left(\frac{\eta_p}{\gamma}\right)^{\alpha_p}\left[\tfrac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\alpha_k} A\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\varepsilon^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_l}}$$

$$>$$

$$\frac{\alpha_c}{z_c}\frac{1}{\varepsilon}\left[\left(\frac{\eta_p}{\gamma}\right)^{\alpha_p}\left[\tfrac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha_k-\eta_c-\eta_p)\right]^{\alpha_k} A\left(\frac{\alpha_c}{z_c}\right)^{\alpha_c}\varepsilon^{\alpha_p}\right]^{\frac{1}{\alpha_l}}$$

$$z_c > \frac{\alpha_c}{z_c}\frac{\gamma}{\varepsilon}$$

Régime D

Dans ce régime, chacune des infrastructures est saturée. Par conséquent, l'état stationnaire appartient au régime D si et seulement si

$$\mathring{g}^*_c < \mathring{g}^*_{cs}$$
$$\mathring{g}^*_p < \mathring{g}^*_{ps}$$

On évalue dans un premier temps la condition $\mathring{g}^*_c < \mathring{g}^*_{cs}$

$$\mathring{g}^*_c < \frac{\alpha_c}{z_c}\frac{1}{\varepsilon}\left[A(\mathring{k}^*)^{\alpha_k}(\varepsilon\mathring{g}^*_c)^{\alpha_c}(\varepsilon\mathring{g}^*_p)^{\alpha_p}\right]$$

$$(\mathring{g}^*_c)^{1-\alpha_c} < \frac{\alpha_c}{z_c}\frac{1}{\varepsilon}A(\mathring{k}^*)^{\alpha_k}\varepsilon^{\alpha_c+\alpha_p}(\mathring{g}^*_p)^{\alpha_p}$$

En substituant $\mathring{g}^*_c$ par son expression

$$\left[\eta_c^{1-\alpha_p}\eta_p^{\alpha_p}\frac{1}{\gamma}A\varepsilon^{\alpha_c+\alpha_p}\right]^{\frac{1-\alpha_c}{\alpha_k+\alpha_l}}(\mathring{k}^*)^{\frac{\alpha_k(1-\alpha_c)}{\alpha_k+\alpha_l}} < \frac{\alpha_c}{z_c}\frac{1}{\varepsilon}A(\mathring{k}^*)^{\alpha_k}\varepsilon^{\alpha_c+\alpha_p}(\mathring{g}^*_p)^{\alpha_p}$$

puis $\mathring{g}^*_p$

$$\left[\eta_c^{1-\alpha_p}\eta_p^{\alpha_p}\frac{1}{\gamma}A\varepsilon^{\alpha_c+\alpha_p}\right]^{\frac{1-\alpha_c}{\alpha_k+\alpha_l}}(\mathring{k}^*)^{\frac{\alpha_k(1-\alpha_c)}{\alpha_k+\alpha_l}} < \frac{\alpha_c}{z_c}\frac{1}{\varepsilon}A(\mathring{k}^*)^{\alpha_k}\varepsilon^{\alpha_c+\alpha_p}\left[\eta_c^{\alpha_c}\eta_p^{1-\alpha_c}\frac{1}{\gamma}A\varepsilon^{\alpha_c+\alpha_p}\right]^{\frac{\alpha_p}{\alpha_k+\alpha_l}}(\mathring{k}^*)^{\frac{\alpha_k\alpha_p}{\alpha_k+\alpha_l}}$$

En regroupant les termes

$$\begin{array}{ccccc}
(\mathring{k}^*)^{\frac{\alpha_k(1-\alpha_c)-\alpha_k(\alpha_k+\alpha_l)-\alpha_k\alpha_p}{\alpha_k+\alpha_l}} & \iff & (\mathring{k}^*)^{\frac{\alpha_k-\alpha_k\alpha_c-\alpha_k\alpha_k-\alpha_k\alpha_l-\alpha_k\alpha_p}{\alpha_k+\alpha_l}} & \iff & (\mathring{k}^*)^0 \\
\eta_c^{\frac{(1-\alpha_p)(1-\alpha_c)}{\alpha_k+\alpha_l}-\frac{\alpha_c\alpha_p}{\alpha_k+\alpha_l}} & \iff & \eta_c^{\frac{1-\alpha_c-\alpha_p+\alpha_p\alpha_c-\alpha_p\alpha_c}{\alpha_k+\alpha_l}} & \iff & \eta_c^1 \\
\eta_p^{\frac{\alpha_p(1-\alpha_c)}{\alpha_k+\alpha_l}-\frac{\alpha_p(1-\alpha_c)}{\alpha_k+\alpha_l}} & \iff & \eta_p^{\frac{\alpha_p-\alpha_p\alpha_c-\alpha_p+\alpha_p\alpha_c}{\alpha_k+\alpha_l}} & \iff & \eta_p^0 \\
\left[\frac{1}{\gamma}A\varepsilon^{\alpha_c+\alpha_p}\right]^{\frac{1-\alpha_c-\alpha_p}{\alpha_k+\alpha_l}} & \iff & \left[\frac{1}{\gamma}A\varepsilon^{\alpha_c+\alpha_p}\right]^{\frac{\alpha_k+\alpha_l}{\alpha_k+\alpha_l}} & \iff & \left[\frac{1}{\gamma}A\varepsilon^{\alpha_c+\alpha_p}\right]^1
\end{array}$$

La condition se réduit à

$$\eta_c \frac{1}{\gamma} A\varepsilon^{\alpha_c+\alpha_p} < \frac{\alpha_c}{z_c}\frac{1}{\varepsilon} A\varepsilon^{\alpha_c+\alpha_p}$$
$$z_c < \frac{\alpha_c}{z_c}\frac{\gamma}{\varepsilon}$$

On passe dans un second temps à la condition $\mathring{g}_p^* < \mathring{g}_{ps}^*$

$$\mathring{g}_p^* < \frac{\alpha_p}{z_p}\frac{1}{\varepsilon}\left[A(\mathring{k}^*)^{\alpha_k}(\varepsilon\mathring{g}_c^*)^{\alpha_c}(\varepsilon\mathring{g}_p^*)^{\alpha_p}\right]$$
$$\left(\mathring{g}_p^*\right)^{1-\alpha_p} < \frac{\alpha_p}{z_p}\frac{1}{\varepsilon} A(\mathring{k}^*)^{\alpha_k}\varepsilon^{\alpha_c+\alpha_p}(\mathring{g}_c^*)^{\alpha_c}$$

De la même manière, en substituant $\mathring{g}_c^*$ et $\mathring{g}_p^*$ puis en regroupant les termes, la condition se réduit à

$$z_p < \frac{\alpha_p}{\eta_p}\frac{\gamma}{\varepsilon}$$